Programme de colle de Maths en PCSI A.
Semaine 2 du 28 septembre au 02 octobre 2015

Étude de fonctions

L'étudiant sera évalué sur le programme figurant dans «À connaître ». Les notions, résultats ou savoirs-faire en gras sont à réviser plus particulièrement.
Au début de la colle, l'étudiant sera interrogé sur l'une des questions de cours figurant dans « Questions de cours possibles ».
Une fois la question de cours traitée, lui seront donnés un ou deux exercices balayant le programme indiqué.

La note attribuée à l'issue de la colle prendra en compte l'évaluation des quatre compétences suivantes :

- *savoir :* connaissance des notions du cours et capacité à les mettre en oeuvre dans des applications directes (*savoirs-faire*) ;
- *manipuler :* aptitude à manipuler des expressions algébriques et à mener à bien des calculs ;
- *raisonner :* prise d'initiative, rigueur de la démarche et maitrise des raisonnements mathématiques ;
- *communiquer :* présentation, rédaction, notation et vocabulaire en adéquation avec le champ disciplinaire, prise de parole et intéraction.

À connaître

Manipulation d'inégalités et résolution d'inéquations

- Inégalités et opérations ;
- Inéquation du type $|x| \leq a$ et $|x| \geq a$. **Inégalité triangulaire.**
- *Savoirs-faire.* **Inéquation du second degré** ; signe d'une expression factorisée à l'aide d'un tableau de signe.

Généralités sur les fonctions

- Domaine de définition, image, courbe représentative d'une fonction ;
- Opérations sur les fonctions : somme ; produit ; quotient ; **composée**
- (Stricte) monotonie d'une fonction. Monotonie et opération : somme ; composée.
- *Savoirs-faire.* **Détermination** du domaine de définition d'une fonction. Monotonie d'une fonction dans des cas simples. Obtention des courbes représentative de $x \mapsto f(x+a)$; $x \mapsto f(a-x)$; $x \mapsto f(x)+a$; $x \mapsto f(\lambda x)$; $x \mapsto \lambda f(x)$ à partir de la courbe représentative d'une fonction f
- **Parité** : fonction paire/impaire. **Propriété** de symétrie de la courbe représentative associée.
- **Périodicité** : fonction périodique de période $T > 0$. **Propriété** d'invariance de la courbe représentative associée.
- *Savoirs-faire.* **Etudier** la parité, la périodicité d'une fonction. **Restriction du domaine d'étude**.

Dérivabilité et dérivée en un point

- **Définition** de la dérivée et de la dérivabilité d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in I$. **Interprétation graphique**. **Équation de la tangente**.
- Règles opératoires : somme ; produit ; quotient ; **composée**.
- signe de la dérivée et variations.
- *Savoirs-faire.* **Etudier** la dérivabilité d'une fonction ; étudier les variations d'une fonction dérivable.

Notion d'asymptote en $\pm\infty$.

- **Définition**. C.N.S d'existence d'une asymptote oblique en $\pm\infty$.
- *Savoir-faire.* **Détermination pratique** d'une asymptote oblique en $\pm\infty$.

Fonctions usuelles rencontrées au lycée

- Étude des fonctions $\sqrt{\ }$, ln, exp, cos, sin et tan : domaine de définition et de dérivabilité, dérivée, sens de variations, restriction du domaine d'étude, limites aux bornes du domaine d'étude, représentation graphique.

- **Les limites de référence** :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\exp x} = 0 \; ; \; \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0.$$

- **Les formules de trigonométrie** d'addition et la formule

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Notion de bijection

- **Théorème des valeurs intermédaires.**
  N.B. Pour le moment, la continuité de la fonction se justifie en montrant que la fonction est dérivable. Toutefois, on prendra garde au fait qu'une fonction continue en un point peut ne pas être dérivable en ce point.
- *Savoir-faire.* utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier qu'une équation du type $f(x) = y_0$ admet au moins une solution.
- **Définition** d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ réalisant une bijection de $D_1 \subset D_f$ vers D_2. **définition** de la réciproque $g : D_2 \to D_1$ associée à une bijection $f : D_1 \to D_2$.
- **Propriétés** d'une réciproque : règles de simplification ; représentation graphique de g à partir de celle de f ; cas où la bijection f est strictement monotone.
- **Théorème de la bijection continue.**
- *Savoir-faire.* Utiliser le théorème de la bijection continue pour établir qu'une fonction f réalise une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J.
- **Théorème de dérivabilité de la réciproque en un point.** Version globale du théorème.
- *Savoir-faire.* Appliquer le théorème pour justifier la dérivabilité et déterminer la dérivée en un point d'une fonction définie comme la réciproque d'une fonction donnée.

Questions de cours possibles

- inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et sa démonstration ;
- définition de dérivabilité et de nombre dérivé en un point ; interprétation géométique ; équation de la tangente ; obtention de l'une des trois limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}; \; ; \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

- condition nécessaire et suffisante d'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$: énoncé et démonstration.
- Règles de simplification entre une bijection et sa réciproque : énoncé et démonstration. Si $f : D_1 \to D_2$ est strictement monotone sur D_1, alors g est strictement monotone sur D_2 de même monotonie que f : démonstration dans le cas où f est strictement croissante.
- Théorème de la bijection continue : énoncé et application à $f : x \mapsto x^3$.
- Théorème de dérivabilité de la réciproque en un point : énoncé et application à la dérivabilité de exp vue comme réciproque de ln .

Manipuler

L'étudiant sera évalué sur :
- le calcul de dérivées ;
- la manipulation d'inégalités ;
- la résolution d'inéquations et la détermination du signe d'une fonction ;
- le calcul de limites, notamment lors de situations simples d'indétermination, conduisant à de la réécriture.

Raisonner

L'étudiant doit savoir mener à bien un raisonnement par équivalence en vue d'établir une inégalité.