# Programme de colle de Maths en PCSI A.
# Semaine 3 du 05 octobre au 09 octobre 2015

*Étude de fonctions et nombres complexes*

L'étudiant sera évalué sur le programme figurant dans «À connaître ». Les notions, résultats ou savoirs-faire en gras sont à réviser plus particulièrement.
Au début de la colle, l'étudiant sera interrogé sur l'une des questions de cours figurant dans « Questions de cours possibles ».
Une fois la question de cours traitée, lui seront donnés un ou deux exercices balayant le programme indiqué.

La note attribuée à l'issue de la colle prendra en compte l'évaluation des quatre compétences suivantes :
- *savoir :* connaissance des notions du cours et capacité à les mettre en oeuvre dans des applications directes (*savoirs-faire*) ;
- *manipuler :* aptitude à manipuler des expressions algébriques et à mener à bien des calculs ;
- *raisonner :* prise d'initiative, rigueur de la démarche et maitrise des raisonnements mathématiques ;
- *communiquer :* présentation, rédaction, notation et vocabulaire en adéquation avec le champ disciplinaire, prise de parole et intéraction.

## À connaître

### *Notion de bijection*

- **Théorème des valeurs intermédaires.**
  N.B. Pour le moment, la continuité de la fonction se justifie en montrant que la fonction est dérivable. Toutefois, on prendra garde au fait qu'une fonction continue en un point peut ne pas être dérivable en ce point.
- *Savoir-faire.* utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier qu'une équation du type $f(x) = y_0$ admet au moins une solution.
- **Définition** d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ réalisant une bijection de $D_1 \subset D_f$ vers $D_2$. **définition** de la réciproque $g : D_2 \to D_1$ associée à une bijection $f : D_1 \to D_2$.
- **Propriétés** d'une réciproque : règles de simplification ; représentation graphique de $g$ à partir de celle de $f$ ; cas où la bijection $f$ est strictement monotone.
- **Théorème de la bijection continue.**
- *Savoir-faire.* Utiliser le théorème de la bijection continue pour établir qu'une fonction $f$ réalise une bijection d'un intervalle $I$ vers un intervalle $J$.
- **Théorème de dérivabilité de la réciproque en un point.** Version globale du théorème.
- *Savoir-faire.* Appliquer le théorème pour justifier la dérivabilité et déterminer la dérivée en un point d'une fonction définie comme la réciproque d'une fonction donnée.

### *Nombres complexes*

**Nombres complexes sous forme algébrique**
- Partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. Egalité de deux nombres complexes écrits sous forme algébrique. Nombre réel, nombre imaginaire.
- *Savoir-faire.* Déterminer la forme algébrique d'une somme, d'un produit, ou d'un quotient de nombres complexes écrits sous forme algébrique.
- Conjugué $\bar{z}$ d'un nombre complexe $z$ : définition ; opérations et conjugaison ; formules $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$ ; caractérisation d'un réel et d'un imaginaire à l'aide du conjugué ;
- Module $|z|$ d'un nombre complexe $z$ : définition ; formule $|z|^2 = z\,\bar{z}$ ; module d'un produit et d'un quotient ; **inégalité triangulaire** ;
- **Interprétation géométrique** des nombres complexes : notion d'image ; lien entre somme de complexes et somme de vecteurs ; lien entre module et distance entre points.

**Forme trigonométrique d'un nombre complexe**
- Théorème d'écriture d'un nombre complexe $z$ non nul sous forme trigonométrique : $z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. **Egalité** de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique.

- *Savoir-faire.* Passer de la représentation sous forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement de la forme trigonométrique à la forme algébrique.
- Notation d'Euler $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. **Propriétés. Formules de Moivre et d'Euler.**
  N.B. Les étudiants ne connaissent pas la formule du binôme de Newton.
- *Savoir-faire.* Retrouver les formules de trigonométrie usuelles à l'aide des propriétés de $\theta \mapsto e^{i\theta}$.
- **Argument** d'un nombre complexe non nul. Argument principal. Argument d'un produit et d'un quotient.
- **Définition** et **propriétés** de l'exponentielle complexe.

**Résolution d'équations polynomiales**

- *savoir-faire.* Détermination des racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique.
- *savoir-faire.* Résolution d'une équation de la forme $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$.
- **Description** de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n-$ièmes de l'unité.
- *savoir-faire* Résolution d'une équation du type $z^n = \omega$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

## Questions de cours possibles

- Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ et sa démonstration ;
- Formules d'Euler. Application à la linéarisation de $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$.
- Notation d'Euler : définition et propriétés. Obtention des formules de trigonométrie pour $\cos\theta + \cos\theta'$ et $\sin\theta + \sin\theta'$.
- Description de $\mathbb{U}_n$. Démonstration de $z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Description de $\mathbb{U}_6$ et interprétation géométrique.
- Règles de simplification entre une bijection et sa réciproque : énoncé et démonstration. Si $f : D_1 \to D_2$ est strictement monotone sur $D_1$, alors $g$ est strictement monotone sur $D_2$ de même monotonie que $f$ : démonstration dans le cas où $f$ est strictement croissante.
- Théorème de la bijection continue : énoncé et application à $f : x \mapsto x^3$.
- Théorème de dérivabilité de la réciproque en un point : énoncé et application à la dérivabilité de exp vue comme réciproque de $\ln$.

## Manipuler

L'étudiant sera évalué sur :

- le calcul de dérivées ;
- la manipulation d'inégalités ;
- la résolution d'inéquations et la détermination du signe d'une fonction ;
- le calcul de limites, notamment lors de situations simples d'indétermination, conduisant à de la réécriture.
- manipulation de nombres complexes sous forme algébrique et trigonométrique.

## Raisonner

L'étudiant doit savoir mener à bien un raisonnement par équivalence en vue d'établir une inégalité.