Programme de colle de Maths en PCSI A.
Semaine 4 du 12 octobre au 16 octobre 2015

Nombres complexes et fonctions usuelles

L'étudiant sera évalué sur le programme figurant dans «À connaître ». Les notions, résultats ou savoirs-faire en gras sont à réviser plus particulièrement.
Au début de la colle, l'étudiant sera interrogé sur l'une des questions de cours figurant dans « Questions de cours possibles ».
Une fois la question de cours traitée, lui seront donnés un ou deux exercices balayant le programme indiqué.

La note attribuée à l'issue de la colle prendra en compte l'évaluation des quatre compétences suivantes :

- *savoir :* connaissance des notions du cours et capacité à les mettre en oeuvre dans des applications directes (*savoirs-faire*) ;
- *manipuler :* aptitude à manipuler des expressions algébriques et à mener à bien des calculs ;
- *raisonner :* prise d'initiative, rigueur de la démarche et maitrise des raisonnements mathématiques ;
- *communiquer :* présentation, rédaction, notation et vocabulaire en adéquation avec le champ disciplinaire, prise de parole et intéraction.

À connaître

Nombres complexes

Nombres complexes sous forme algébrique

- Partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. Egalité de deux nombres complexes écrits sous forme algébrique. Nombre réel, nombre imaginaire.
- *Savoir-faire.* Déterminer la forme algébrique d'une somme, d'un produit, ou d'un quotient de nombres complexes écrits sous forme algébrique.
- Conjugué $\bar{z}$ d'un nombre complexe z : définition ; opérations et conjugaison ; formules $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$; caractérisation d'un réel et d'un imaginaire à l'aide du conjugué ;
- Module $|z|$ d'un nombre complexe z : définition ; formule $|z|^2 = z\,\bar{z}$; module d'un produit et d'un quotient ; **inégalité triangulaire** ;
- **Interprétation géométrique** des nombres complexes : notion d'image ; lien entre somme de complexes et somme de vecteurs ; lien entre module et distance entre points.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

- Théorème d'écriture d'un nombre complexe z non nul sous forme trigonométrique : $z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. **Egalité** de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique.
- *Savoir-faire.* Passer de la représentation sous forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement de la forme trigonométrique à la forme algébrique.
- Notation d'Euler $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. **Propriétés. Formules de Moivre et d'Euler.**
  N.B. Les étudiants ne connaissent pas la formule du binôme de Newton.
- *Savoir-faire.* Retrouver les formules de trigonométrie usuelles à l'aide des propriétés de $\theta \mapsto e^{i\theta}$.
- **Argument** d'un nombre complexe non nul. Argument principal. Argument d'un produit et d'un quotient.
- **Définition** et **propriétés** de l'exponentielle complexe.

Résolution d'équations polynomiales

- *savoir-faire.* Détermination des racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique.
- *savoir-faire.* Résolution d'une équation de la forme $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$.
- **Description** de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines $n-$ièmes de l'unité.
- *savoir-faire* Résolution d'une équation du type $z^n = \omega$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Nombres complexes et géométrie

- Traduction complexe de l'alignement et de l'orthogonalité.
- Ecriture complexe d'une translation ; d'une rotation et d'une homothétie.

- *savoir-faire* reconnaître l'une de ces transformations complexes donnée via son écriture complexe sous la forme $f\ :\ z \mapsto a\,z + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
  N.B. La notion de similitude directe ou l'écriture complexe d'une symétrie axiale ne sont pas au programme. Néanmoins, les étudiants doivent savoir que $z \mapsto \bar{z}$ est la représentation complexe de la symétrie axiale d'axe $y = 0$.

Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle et logarithme

- **Définition** du logarithme népérien comme la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1 de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
  équation fonctionnelle :
  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2},\ \ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y).$$
  Identités «résultantes » : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2},\ \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$;
  $\forall (x, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n\ \ln(x)$.

  étude de ln et **courbe représentative** de la fonction ln .
- **Définition** de la fonction exponentielle en tant que réciproque de la fonction ln . Règles de simplification avec la fonction ln .
  Équation fonctionnelle :
  $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x + y) = \exp(x)\ \exp(y).$$
  Identités «dérivées » : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$; $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
  $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \exp(n\,x) = (\exp(x))^n$.
  Etude de exp et **courbe représentative** de la fonction exponentielle.

Fonctions puissances

- **Définition** de $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. **Étude** complète de $x \mapsto x^\alpha$ en fonction de α. **Courbe représentative** ;
- **Croissance comparée** en $+\infty$.
- Etude de fonction de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.

Questions de cours possibles

- Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ et sa démonstration ;
- Formules d'Euler : énoncé et démonstration. Application à la linéarisation de $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$.
- Notation d'Euler : définition et propriétés. Obtention des formules de trigonométrie pour $\cos\theta + \cos\theta'$ et $\sin\theta + \sin\theta'$.
- Description de $\mathbb{U}_n$. Démonstration de $z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Description de $\mathbb{U}_6$ et interprétation géométrique.
- Démonstration de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction ln .
- Démonstration de la croissance comparée en $+\infty$.

Manipuler

L'étudiant sera évalué sur :

- le calcul de dérivées ;
- la manipulation d'inégalités ;
- la résolution d'inéquations et la détermination du signe d'une fonction ;
- le calcul de limites, notamment lors de situations simples d'indétermination, conduisant à de la réécriture.
- manipulation de nombres complexes sous forme algébrique et trigonométrique.

Raisonner

L'étudiant doit savoir mener à bien un raisonnement par équivalence en vue d'établir une inégalité.