# Programme de colle de Maths en PCSI A.

## Semaine 14 du 18 janvier au 23 janvier 2016

*Développements limités et applications*

L'étudiant sera évalué sur le programme figurant dans «À connaître ». Les notions, résultats ou savoirs-faire en gras sont à réviser plus particulièrement.
Au début de la colle, l'étudiant sera interrogé sur l'une des questions de cours figurant dans « Questions de cours possibles ».
Une fois la question de cours traitée, lui seront donnés un ou deux exercices balayant le programme indiqué.

La note attribuée à l'issue de la colle prendra en compte l'évaluation des quatre compétences suivantes :

- *savoir :* connaissance des notions du cours et capacité à les mettre en oeuvre dans des applications directes (*savoirs-faire*) ;
- *manipuler :* aptitude à manipuler des expressions algébriques et à mener à bien des calculs ; manipuler des équivents ;
- *raisonner :* prise d'initiative, rigueur de la démarche et maitrise des raisonnements mathématiques ;
- *communiquer :* présentation, rédaction, notation et vocabulaire en adéquation avec le champ disciplinaire, prise de parole et intéraction.

## À connaître

### *Comparaison locale de fonctions*

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur un intervalle $I$ ; $a$ un élément ou l'une des extrémités de $I$. On suppose que $g$ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

- *Négligeabilité.* **Définition** de $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$. Manipulations élémentaires du « petit o ». Cas des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \geq 0$ au voisinage de $x = 0$. Retour sur la **croissance comparée en** $+\infty$.
- *Equivalence.* **Définition** de $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Manipulations élémentaires d'équivalents : produit ; puissance ; inverse ; etc ... Application au calcul de limites.

### *Notion de Développement limité*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- **Définition** d'existence d'un développement limité d'ordre $n$ en $a$ de $f$. « Ecriture translatée » du développement limité d'ordre $n$ en $a$ de $f$ pour se ramener au développement limité d'une fonction en 0 :
$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \alpha_0 + \cdots + \alpha_k\, h^k + \cdots + \alpha_n\, h^n + o(h^n).$$
**Propriétés :** en cas d'existence, unicité et troncature du DL d'ordre $n$ en $a$.
- Lien avec la dérivabilité dans le cas où $f$ admet un développement limité d'ordre 1 en $a$.
- **Définition** de fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$ (avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).
- **Condition suffisante** d'existence d'un DL d'ordre $n$ en $a$ (avec $n \in \mathbb{N}$) :
Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$, alors $f$ admet un DL d'ordre $n$ en $a$ et celui-ci est donné par la formule de Taylor-Young :
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\right) + o((x-a)^n).$$
- Développement limité d'ordre $n$ en 0 des fonctions usuelles **à connaître impérativement** :
$$x \mapsto \frac{1}{1-x}\ ;\ x \mapsto \frac{1}{1+x}\ ;\ x \mapsto (1+x)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})\ ;\ \exp\ ;\ \mathrm{ch}\ ;\ \mathrm{sh}\ ;\ \cos\ ;\ \sin\ ;\ x \mapsto \ln(1+x)\ ;\ \arctan.$$
Il est impératif de savoir comment retrouver les DL d'ordre $n$ en 0 de ces fonctions.
- Règles opératoires : calcul du DL d'ordre $n$ en 0 d'une combinaison linéaire ; d'un produit ; d'un quotient de deux fonctions dont on connaît le DL d'ordre $n$ en 0. Les étudiants doivent savoir se ramener à la situation en 0 dans le cas d'un DL en un point quelconque. S'agissant de la composition, les étudiants doivent savoir mener à bien un calcul de DL.

***Applications***

- Recherche d'équivalent et obtention de limite.
- Equivalent et signe au voisinage d'un point.
- Allure locale de la courbe représentative d'une fonction en un point.
- **Définition** d'asymptote. Recherche d'asymptote. Les étudiants doivent savoir comment procéder pour déterminer la présence d'une asymptote à la courbe représentative d'une fonction.

## Questions de cours possibles

- Règles opératoires sur les équivalents : produit, quotient, élévation à la puissance $\alpha$. Enoncé et démonstration.
- Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ et expression des dérivées d'ordre $k$. Démonstration par récurrence.
- Énoncé de la formule de Taylor-Young. Application à l'obtention du développement limité d'ordre $n$ en 0 de $\exp$.
- Développement limité d'ordre $2n+2$ en 0 de arctan par primitivation.

## Manipuler

L'étudiant sera évalué sur :
- le calcul de dérivées ;
- le calcul de limites, notamment lors de situations simples d'indétermination, conduisant à de la réécriture ;
- la manipulation des relations de comparaison $o$ et $\sim$ ;
- le calcul de développements limités ;

## Raisonner

L'étudiant doit savoir mener à bien :
- un raisonnement par équivalence ;
- un raisonnement par récurrence, en vue d'établir une formule pour l'expression des dérivées successives d'une fonction.