Programme de colle de Maths en PCSI A.
Semaine 22 du 18 avril au 22 avril 2016

Calcul matriciel et systèmes linéaires. Espaces vectoriels

L'étudiant sera évalué sur le programme figurant dans «À connaître ». Les notions, résultats ou savoirs-faire en gras sont à réviser plus particulièrement.
Au début de la colle, l'étudiant sera interrogé sur l'une des questions de cours figurant dans « Questions de cours possibles ».
Une fois la question de cours traitée, lui seront donnés un ou deux exercices balayant le programme indiqué.

La note attribuée à l'issue de la colle prendra en compte l'évaluation des quatre compétences suivantes :

- *savoir :* connaissance des notions du cours et capacité à les mettre en oeuvre dans des applications directes (*savoirs-faire*) ;
- *manipuler :* aptitude à manipuler des expressions algébriques et à mener à bien des calculs ; manipuler des équivents ;
- *raisonner :* prise d'initiative, rigueur de la démarche et maitrise des raisonnements mathématiques ;
- *communiquer :* présentation, rédaction, notation et vocabulaire en adéquation avec le champ disciplinaire, prise de parole et intéraction.

À connaître

Calcul matriciel

Il s'agit d'une première approche du calcul matriciel en liaison avec la résolution de systèmes linéaires. Certains points à ce sujet sont admis pour l'heure, le langage de l'algèbre linéaire vu ultérieurement permettant d'établir certains résultats de manière élégante.

On se restreindra si possible à des calculs sur des matrices de petite dimension ...

$\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- **Définitions.** Matrice de dimension $m \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ensemble $M_{m,p}(\mathbb{K})$ des matrices de dimension $m \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$; Ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. **Exemples.** $O_{m,p}$: matrice nulle de dimension $m \times p$; I_n : matrice identité d'ordre n. Dans le cas d'une matrice carrée d'ordre n : **définitions** de matrice triangulaire supérieure ; triangulaire inférieure ; diagonale.
- Opérations matricielles.
  - → Addition et multiplication par un scalaire.
    Soient $A \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{m,p}(\mathbb{K})$; $\alpha \in \mathbb{K}$: **définition** de $A + B$ et $\alpha.A$. **Propriétés** de l'addition et de la multiplication par un scalaire.
    N.B. Ces propriétés seront à connaître absolument au moment où l'on parlera d'espace vectoriel dans son sens le plus général ...
  - → Multiplication matricielle.
    Soient $A \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$: **définition** de $A \times B$.
    Il importe de savoir quand effectuer un produit matriciel et de calculer le produit de deux matrices.
    Propriétés du produit matriciel. Cas particulier du produit matriciel dans $M_n(\mathbb{K})$. Mises en garde sur le produit matriciel dans $M_n(\mathbb{K})$. **Formule du binôme de Newton matricielle.**
  - → Transposée.
    Définition de la transposée d'une matrice. Transposée d'une combinaison linéaire, d'un produit.
    N.B. On ne demande pas pour le moment de maitriser la manipulation littérale d'expressions matricielles. Toutefois, un exercice pourra faire intervenir une question guidée à ce sujet.
  - → inversibilité et inverse d'une matrice carré : **définition**. **Produit** de deux matrices inversibles. **Transposée** d'une matrice inversible.

Systèmes linéaires : une première approche

Il s'agit d'une première approche de l'algèbre linéaire. Les étudiants doivent savoir appliquer la méthode du pivot de Gauss pour en déduire l'ensemble des solutions d'un système linéaire. Aucun aspect théorique n'est exigible

pour l'heure. Le contexte géométrique est un prétexte pour se familiariser avec les différents cas de figure qu'on peut rencontrer. L'étudiant doit savoir représenter une droite du plan et de l'espace ou un plan de l'espace à l'aide d'équation(s) cartésienne(s) ou à l'aide d'une représentation paramétrique.

- Vocabulaire : système linéaire $m \times p$; système linéaire homogène associé ; matrice d'un système linéaire et représentation matricielle ;
- Système incompatible ; système compatible ;
- Opérations élémentaires ; système linéaire équivalents ;
- Méthode du pivot de Gauss ; définition d'une matrice échelonnée ; d'un système linéaire échelonné
- **Rang** d'un système linéaire. Description de l'ensemble des solutions d'un système compatible à l'aide des solutions du système homogène associé.
- Cas d'un système linéaire $n \times n$. Caractérisation d'un système de Cramer, c'est-à-dire admettant une unique solution dans $\mathbb{K}^n$ à l'aide de l'inversibilité de la matrice associée au système. Application à l'inversibilité d'une matrice et au calcul de son inverse.

Espaces vectoriels : généralités

- Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Notions de vecteur de E ; de scalaire. Premières règles de calcul : $\forall \vec{u} \in E,\ 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}_E$; $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$; $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \forall \vec{u} \neq \vec{0}_E,\ \lambda \cdot \vec{u} \neq \vec{0}_E$.
- **Exemples fondamentaux** : les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$; $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^I$ où I désigne un intervalle. Il faut impérativement connaître la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ces exemples fondamentaux. N.B. Le $K-$espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ sera rencontré dans le chapitre sur les polynômes.
- **Combinaison linéaire** d'une famille finie de vecteurs de E.
- **Définition** et **caractérisation** d'un sous-espace vectoriel (s.e.v.) d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. **Sous-espaces vectoriels triviaux** ; Un s.e.v. de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'il est muni de la structure du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E.
- **Intersection** et **somme** de deux s.e.v.
- **Définition** du sous-espace vectoriel engendré par une famille finie $(\vec{u}_1 \cdots, \vec{u}_m) \in E^m$.
- **Définition** et **Caractérisation** de deux sous-espaces vectoriels en somme directe.

Questions de cours possibles

- Rappeler la structure de $\mathbb{K}-$espace vectoriel de chacun des espaces vectoriels de référence. Dans chacun des cas, on indiquera quel est le « vecteur nul » .
- Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- Après en avoir donné la définition, montrer que le sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs est un sous-espace vectoriel.
- Après en avoir précisé la définition, montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- Après en avoir indiqué la définition, énoncer et démontrer la caractérisation de deux sous-espaces vectoriels en somme directe.

Manipuler

L'étudiant sera évalué sur :

- la résolution de systèmes linéaires ;

Raisonner

L'étudiant doit savoir mener à bien :

- La démonstration d'une implication de manière directe, par l'absurde ou par contraposée ;
- un raisonnement par équivalence ;
- un raisonnement par récurrence ;