Préparation à l'Oral
Mathématiques
PSI

Algèbre Linéaire

Exercice 1 : (CCINP 24 sans préparation)

1. Cours : Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.
2. Pour tout k entier entre 1 et n, on pose $f_k(x) = e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est libre.
3. Montrer sans les calculer que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$, que l'on notera α, β, γ.
4. Résoudre le système suivant, composé de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} x + y + z & = & 0 \\ \alpha\, x + \beta\, y +, \gamma\, z & = & 0 \\ \alpha^2\, x + \beta^2\, y +, \gamma^2\, z & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : (CCINP 24)

1. Montrer que si u est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, alors u^2 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer par un contre exemple que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $\operatorname{Ker}(u^2 - \lambda^2 Id) = \operatorname{Ker}(u - \lambda\, Id) \oplus \operatorname{Ker}(u + \lambda\, Id)$.
4. Montrer que si u est bijective, la réciproque de 1 est vraie.

Exercice 3 : (CCINP 24 sans préparation)

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique P.

1. On suppose que P a n racines distinctes. Montrer que A et B sont semblables.
2. Trouver deux matrices ayant même polynôme caractéristique mais qui ne sont pas semblables.

Exercice 4 : (CCINP 24)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où α, β, γ tels que : $\alpha + \beta = \gamma$,$\alpha \neq 0$,$\beta \neq 0 \neq -\gamma$.

1. Montrer que A est diagonalisable .
2. (a) Déterminer χ_C en fonction de χ_A et en déduire le spectre de C.
   (b) Déterminer χ_B en fonction de χ_A et en déduire le spectre de B.
3. Montrer que si $X \in \operatorname{Ker} A$, alors $\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} B$
4. Montrer que $\dim(Ker(B)) \geq 2\dim(Ker(A))$.
5. Diagonaliser B dans le cas où $\alpha = -1, \beta = 3, \gamma = 2$.

Exercice 5 : (CCINP 24 sans préparation)

Diagonalisabilité de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis de $A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$

Exercice 6 : (CCINP 24)

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer le polynôme caractéristique P_a de M_a.
   (b) Effectuer la division euclidienne de $3P_a$ par P'_a, dérivée de P_a.
   (c) En déduire les valeurs de a pour lesquelles M_a est diagonalisable.
2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M_a telle que $|\lambda| \geq 1$.
   Montrer que $|a| \geq \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|} \geq \frac{1}{2}$
   (b) Montrer que si$|a|$ est assez petit, $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 7: (CCINP 24)

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $f \in E$, on définit :

$$\begin{array}{rccl} \varphi(f) : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de φ.
3. Montrer que 1 est valeur propre de φ et déterminer le sous-espace propre associé.
4. Déterminer l'ensemble des valeurs propres et leurs sous-espaces propres associés .

Exercice 8 : (IMT 24)

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = -u$.

1. Soit A la matrice associé à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Calculer la trace de A et en déduire $\operatorname{Ker} u$.

2. Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Exercice 9: (IMT 24)

Soit la matrice :

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant le moins de calcul possible, déterminer le rang de Θ, $\operatorname{Im}(\Theta)$ et $\operatorname{Ker}(\Theta)$.

Exercice 10: (Mines-Ponts 24)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & c \\ a & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Justifier (sans le calculer) qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $A^3 + dA = 0$.
2. Calculer d.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^{2n} en fonction de n, d et A^2.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = I_3 + \alpha A + \beta A^2$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 11 : (Mines-Ponts 24)

Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, le commutant de A est défini par :

$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}$.

Montrer que : $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ \dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$ et chercher les cas d'égalité.

Exercice 12 : (Mines-Ponts 24)

1) Soit A une matrice carrée d'ordre n, montrer l'équivalence entre les deux propositions

i) A est nilpotente
ii) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$

2) Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB - BA = B$.
Montrer que B est nilpotente.

Exercice 13 : (Mines-Ponts 23)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace de E.
Montrez que $A = \left\{u \in \mathscr{L}(E,F),\ G \subset \operatorname{Ker} u\right\}$ est sous-espace de $\mathscr{L}(E,F)$. Donnez sa dimension.

Exercice 14 : (Mines-Ponts 23)

Soient E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, p et q deux réels avec $p+q=1$ et $p \in \left]-1,0\right[\cup \left]0,1\right[$. On pose $u(f) = g$ avec $g : x \longrightarrow f(px+q)$

1) Montrez que u est un automorphisme de E.
2) Montrez que les vp de u sont dans $\left]-1,1\right]$
3) Montrez que si f est vecteur propre de u, il existe un entier k tq $f^{(k)} = 0$. En déduire l'ensemble des vecteurs propres de u. [**2022 :** Question absente] .
4) Calculez $u^n(f)(x)$ par récurrence. [**2022 :** Question absente] .

Exercice 15: (Centrale 24)

Soit $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J.

▶ *Si $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On pose :*

$$S = \{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \|X\| = 1\}$$

où si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

2. Existence de $\sigma(M) = \sup_{X\in S} \|MX\|$, puis montrer que :

$$\sigma(X) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2}.$$

Exercice 16 : (Centrale 24)

Soit E l'ev des fonctions polynomiales. Si $P \in E$, on pose $L(P) : x \longrightarrow e^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t\,\mathrm{d}t$.

1) Montrez L endomorphisme de E.
2) Trouvez les éléments propres de L.