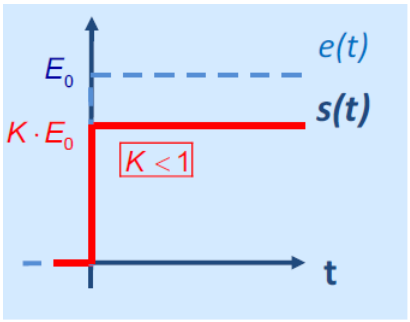
REPONSE A UN ECHELON

1- réponse à un échelon d'un modèle proportionnel : K

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle à action proportionnelle (ou gain pur) sont :

s(t) = K . e(t) pour t ≥ 0 $\xrightarrow{Laplace}$ $H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=K$

K : gain statique – Unité de K = $\frac{unités\ de\ la\ sortie}{unités\ de\ l'entrée}$



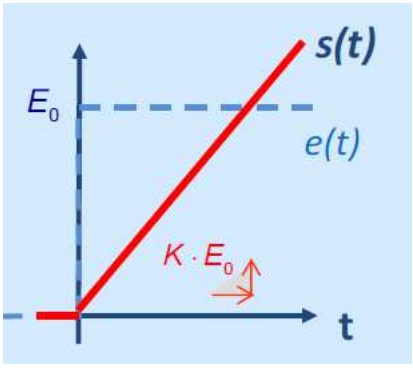
La réponse à un échelon d'amplitude E_0 d'un modèle à action proportionnelle est un **échelon** d'amplitude K E_0. : **s(t) = K . E_0** pour t ≥ 0

2- réponse à un échelon d'un modèle intégrateur : K/p

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle intégrateur sont :

$s(t)=K.\int_0^t e(\tau).d\tau$ pour t ≥ 0 $\xrightarrow{Laplace}$ $H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{p}$

K : gain statique – Unité de K = $\frac{unités\ de\ la\ sortie}{unités\ de\ l'entrée}.s^{-1}$



La réponse à un échelon d'amplitude E_0 d'un modèle intégrateur est une **rampe** de pente K E_0.
s(t) = K . E_0 .t pour t ≥ 0

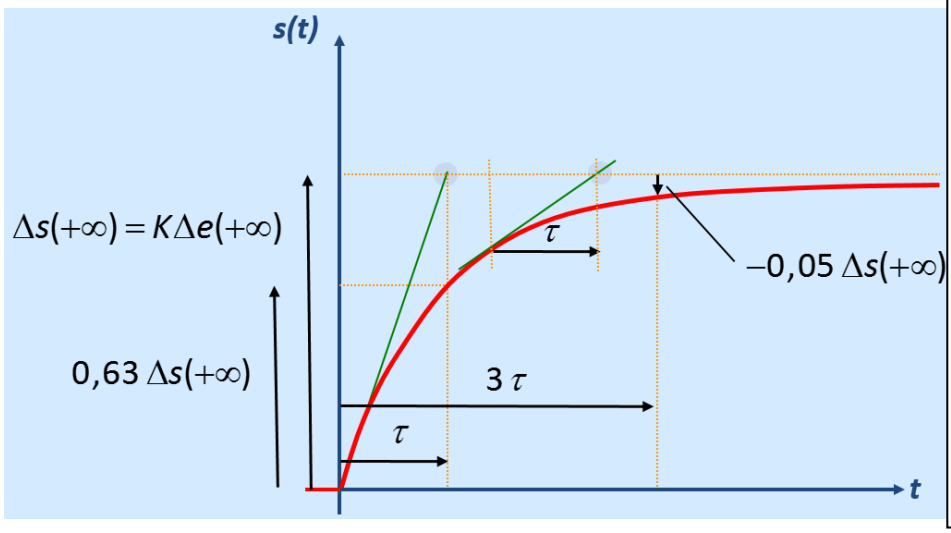
3- réponse à un échelon d'un modèle du 1er ordre : K/(1+ τ.p)

L'équation temporelle (équation différentielle du 1er degré) et la fonction de transfert d'un modèle du premier ordre sont :

$\tau.\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K.e(t)$ pour t ≥ 0 $\xrightarrow{Laplace}$ $H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\tau.p}$

τ **constante de temps** (> 0 et exprimé en secondes)

K : **gain statique** – Unité de K = $\frac{unités\ de\ la\ sortie}{unités\ de\ l'entrée}$.



Le gain statique K caractérise le comportement du modèle en **régime permanent** :

La constante de temps τ caractérise le comportement du modèle en **régime transitoire** :
- durée pour atteindre 63% de la variation totale de la sortie = τ ;
- temps de réponse $tr_{5\%}$ = 3. τ ;

NB : la durée entre l'instant où une droite est tangente à la courbe, et l'instant où cette droite coupe l'asymptote horizontale = τ (notamment pour la tangente à l'instant initial).

La solution de l'équation différentielle du premier degré est $s(t)=K.E_0.(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

A partir de $s(t) = K.E_0.(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$, on retrouve les résultats précédents :

t	t = 0	t = τ	t = 3. τ	t = + ∞
s(t)	s(0) = 0	s(τ)= 0,63 .K.E_0	s(3.τ)= 0,95 .K.E_0	s(+ ∞)=.K.E_0

4- Réponse à un échelon d'un modèle du 2ème ordre $H(p) = \dfrac{K}{1+\dfrac{2.\xi}{\omega_0}p+\dfrac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$

L'équation temporelle (équation différentielle du 2ème degré) et la fonction de transfert d'un modèle du deuxième ordre sont :

$$\frac{1}{{\omega_0}^2}.\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2.\xi}{\omega_0}.\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K.e(t) \text{ pour t} \geq 0 \xrightarrow{\text{Laplace}} H(p)=\frac{K}{1+\frac{2.\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

ω_0 : **pulsation propre** (> 0 et exprimé en radian/secondes)
ξ : **coefficient d'amortissement** (> 0 et sans unité)
K : **gain statique** – Unité de K = $\dfrac{unités\ de\ la\ sortie}{unités\ de\ l'entrée}$.

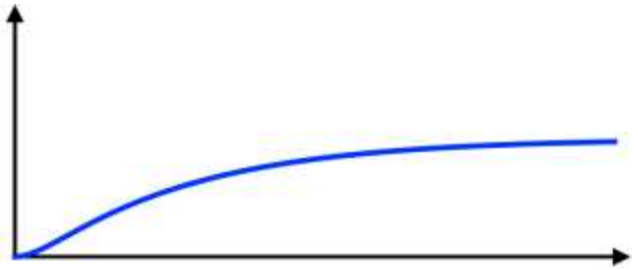
Les réponses sont différentes suivant la valeur du facteur d'amortissement ξ. Les équations temporelles sont données ci-dessous

Réponses apériodiques (non oscillatoires) (ξ ≥ 1)

ξ > 1

$$s(t)=K.E_0.\left(1+\frac{\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{(\tau_2-\tau_1)}-\frac{\tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{(\tau_2-\tau_1)}\right)$$

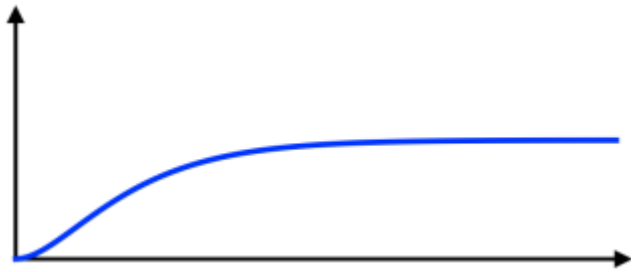
avec $\tau_1=\dfrac{1}{\omega_0}.\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)$ et $\tau_2=\dfrac{1}{\omega_0}.\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)$



ξ = 1

$$s(t)=K.E_0.\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}-\frac{t}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=K.E_0.\left(1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right).e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

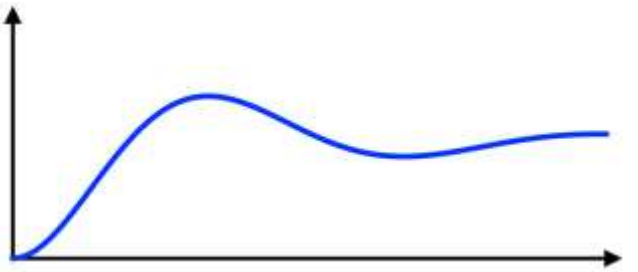
avec $\tau=\dfrac{1}{\omega_0}$



Réponse oscillatoire ξ < 1

$$s(t)=K.E_0.\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\omega_a.\xi.t}.\sin(\omega_a.t+\varphi)\right)$$

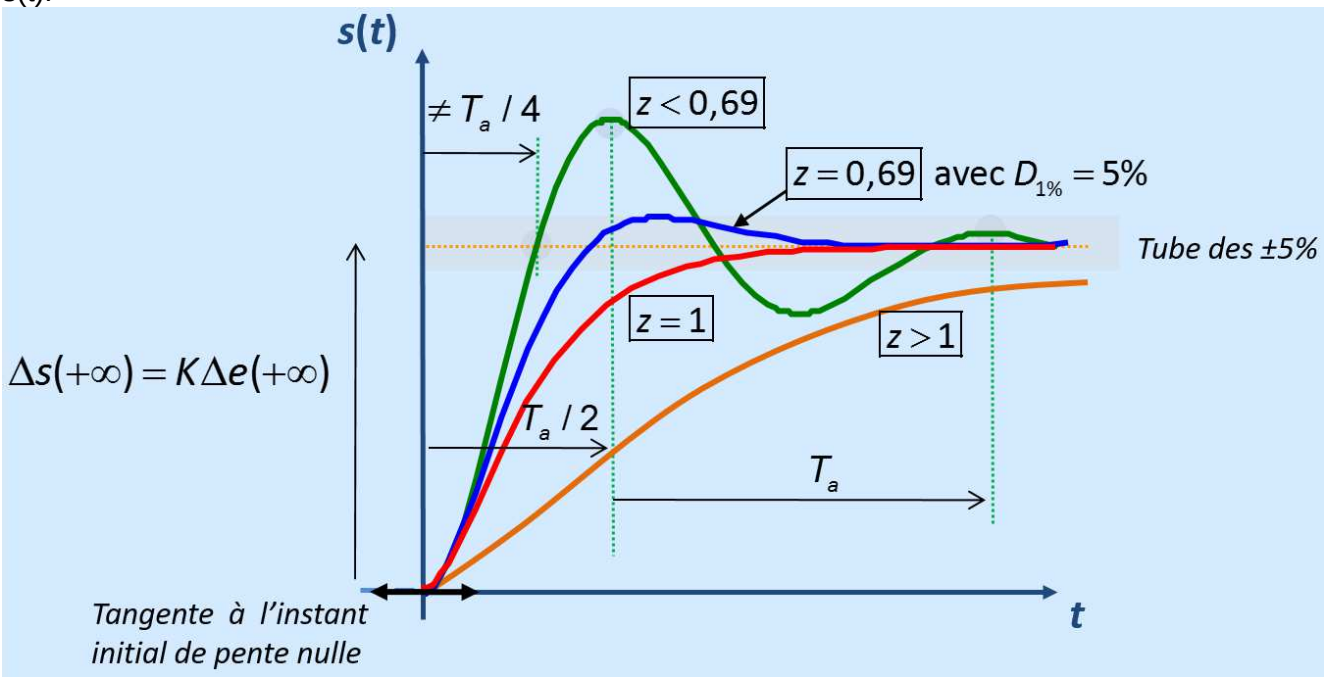
avec $\varphi=\arctan\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$ et $\omega_a=\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}$



La variation totale de la sortie en régime permanent est Δs(+∞) = K. Δe(+∞)
La **tangente à l'instant initial** a une **pente nulle.**

Caractéristiques de la réponse à un échelon

On retiendra les résultats suivants, obtenus à partir de l'étude des équations temporelles de la sortie s(t).



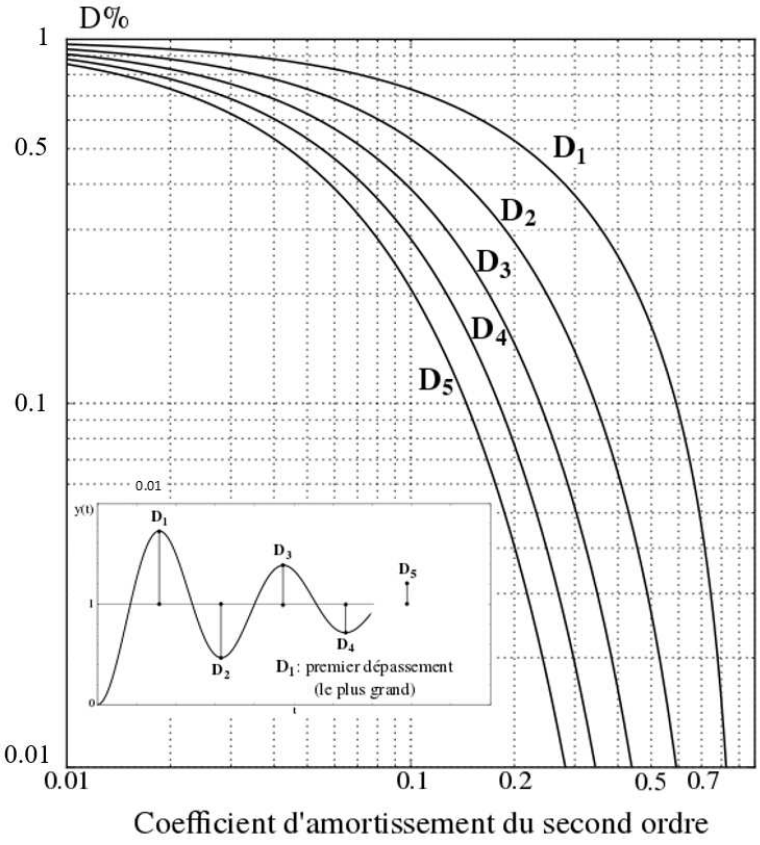
Dépassements

Le nombre et les valeurs des dépassements $D_{k\%}$ varient avec la valeur de ξ:

- lorsque ξ ≥ 1, il n'y pas de dépassement ;
- lorsque 0 < ξ <1, la valeur du dépassement relatif d'ordre k est donnée par l'abaque ci-dessous ou par la relation

$$D_{k\%} = \left| \frac{\Delta s(t_k) - \Delta s(+\infty)}{\Delta s(+\infty)} \right| = e^{\frac{-\xi . k . \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- lorsque ξ = 0,69, il existe un seul dépassement visible à l'oeil (>1%) qui vaut 5%;
- pour 0,9 < ξ < 1, il existe des dépassements mais qui ne sont pas visibles à l'oeil (ils sont très inférieurs à 1%)



Abaque des dépassements relatifs pour la réponse à un échelon d'un modèle du 2ème ordre.

Exemple :

Pour ξ=0,3, on trouve 4 dépassements supérieurs à 1% ($D_{1\%}$ = 37%, $D_{2\%}$ =14%, $D_{3\%}$ = 5% et $D_{4\%}$ = 2%).

Période et pseudo-période

Lorsqu'il y a dépassement (0 < ξ <1), on définit :

- la pulsation amortie qui vaut $\omega_a = \omega_0.\sqrt{1-\xi^2}$ (unités : rad/s)
- la pseudo-période vaut $T_a = \dfrac{2.\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}$

Les dépassements ont lieu toutes les demi-périodes.

En effet la relation entre fréquence et période est donnée par $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2.\pi}$

Attention : la durée entre l'instant d'un dépassement et l'instant d'un passage à la valeur s(+∞) n'est pas égale à Ta/4.

Temps de réponse et temps de réponse réduit

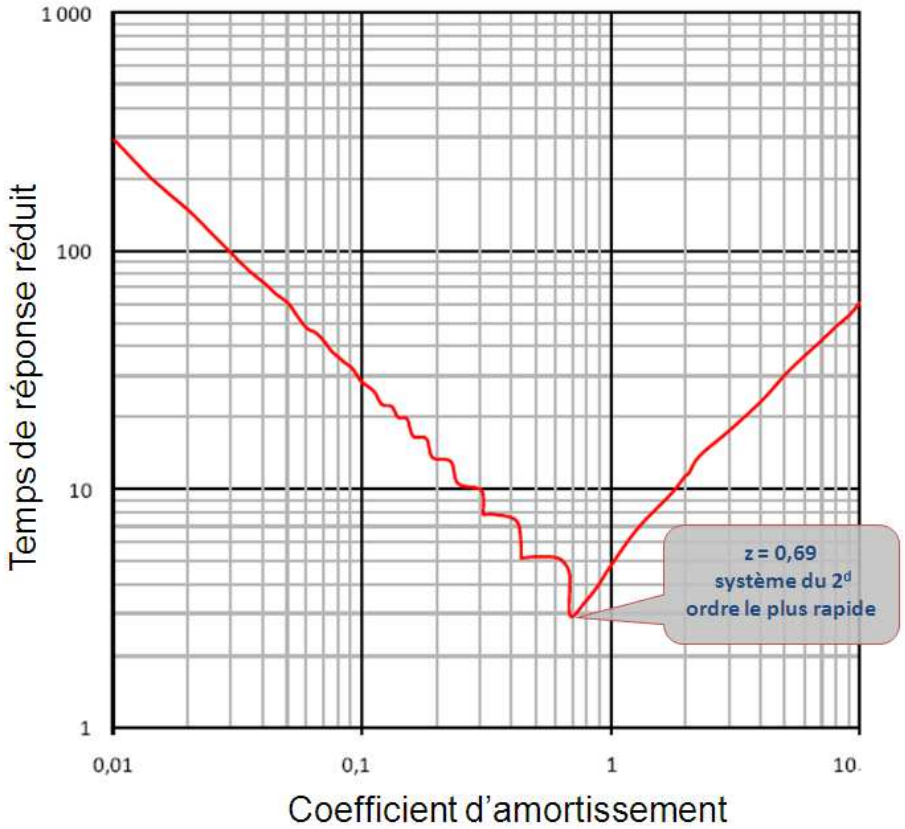
Le temps de réponse à 5% varie avec la valeur de ξ :

- lorsque 0 < ξ <<1, $t_{r5\%}$ est grand car le modèle est peu amorti ;
- lorsque ξ = 0,69, $t_{r5\%}$ est **minimal**, un seul dépassement >1%, $D_{1\%}$ = 5% ;
- lorsque ξ = 1, il s'agit du modèle **sans dépassement le plus rapide** ;
- lorsque ξ >>1, $t_{r5\%}$ est grand car le modèle est très amorti.

Il n'existe pas d'expression simple qui permet de calculer $t_{r5\%}$. On utilise l'abaque ci-dessous qui nous donne la valeur du **temps de réponse réduit**, définit par $t_{r5\%} . \omega_0$ (sans unité) en fonction du facteur d'amortissement ξ.

Deux valeurs sont à connaître :

- lorsque ξ = 0,69, $t_{r5\%} . \omega_0 \approx 3 \Rightarrow t_{r5\%} \approx 3/\omega_0$
- lorsque ξ = 1 $t_{r5\%} . \omega_0 \approx 5 \Rightarrow t_{r5\%} \approx 5/\omega_0$



Temps de réponse réduit $t_{r5\%} . \omega_0$ pour la réponse à un échelon d'un modèle du 2ème ordre.

Bilan

Le gain statique K caractérise le comportement du modèle en régime permanent : Δs(+∞) = K. Δe(+∞)

Le facteur d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0 caractérisent le comportement du modèle en régime transitoire :

- plus ξ est faible, plus les dépassements sont importants ;
- plus ω_0 est faible, plus la pseudo-période est grande.