Exercice 1 : Une étude de dérivée n-ième.

1. La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$, et la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x>0 \Leftrightarrow x>-1$. Ainsi, par composition et quotient, f est définie sur $D =]-1,+\infty[\setminus \{0\}$.
2. En -1 à droite $x \mapsto \frac{1}{x}$ tend vers -1, et $x \mapsto \ln(1+x)$ tend vers $-\infty$ donc, par produit des limites,
$$f(x) \underset{x\to(-1)^+}{\longrightarrow} +\infty.$$
3. La fonction f est dérivable sur D comme produit de fonctions dérivables sur D, et pour tout $x \in D$,
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$
en posant
$$g : x \mapsto \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{1+x}.$$
4. Sur D, la fonction g est du signe de $h : x \mapsto x-(1+x)\ln(1+x)$ car $x \mapsto 1+x>0$ sur D. Or, h est dérivable sur D comme somme et produit de fonctions dérivables sur D et pour $x \in D$
$$h'(x) = 1 - \frac{1+x}{1+x} - \ln(1+x) = -\ln(1+x)$$
donc h' est positive sur $]-1,0[$ puis négative sur $]0,+\infty[$. On obtient le tableau de variations suivant pour la fonction h :

x	-1		0		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	$h(0)$	$\searrow$	

Par suite, pour tout $x \in D$, $h(x) \leq h(0) = 0$ donc h puis g sont négatives sur D. La fonction dérivée f' étant du même signe que g sur D car $x \mapsto x^2$ est positive sur D, elle est négative. En conclusion, f est décroissante sur D.
5. Pour déterminer un développement limité de f en 0 à l'ordre 2, on utilise un développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 3 :
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
qui donne
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$
6. La fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donc un développement limité à l'ordre 0 en 0 : f est continue en 0 avec $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. On peut ainsi prolonger f en 0 par continuité en posant $f(0) = 1$, qui est ainsi définie et continue sur $D' =]-1,+\infty[$.
7. La fonction f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, et donc un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle est donc dérivable en 0 par la formule de Taylor-Young avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
8. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in D$,
$$f^{(0)}(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{T_0(x)}{x^0(1+x)^0} + a_0 \frac{\ln(1+x)}{x^{0+1}}$$
où on a posé $T_0 = 0$ (le polynôme nul) et $a_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est dérivable n fois sur D et qu'il existe un polynôme T_n et un réel a_n tel que pour tout $x \in D$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{x^n(1+x)^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}.$$

Par somme et quotient de fonction dérivable sur D dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur D, la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur D et on a, pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned}
&(f^{(n)})'(x) = f^{(n+1)}(x) \\
&= \frac{T_n'(x)x^n(1+x)^n - T_n(x)n(x(1+x))^{n-1}(1+2x)}{(x^n(1+x)^n)^2} + a_n \frac{\frac{x^{n+1}}{1+x} - \ln(1+x)(n+1)x^n}{(x^{n+1})^2} \\
&= \frac{T_n'(x)x(1+x)x^{n-1}(1+x)^{n-1} - n(2x+1)T_n(x)x^{n-1}(1+x)^{n-1}}{x^{2n}(1+x)^{2n}} + \frac{a_n x^{n-1}(1+x)^{n-1}(1+x)^n}{(1+x)x^{n+1}x^{n-1}(1+x)^{2n-1}} \\
&\qquad - (n+1)a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{2n-n+1}} \\
&= \frac{T_n'(x)x(1+x) - n(2x+1)T_n(x) + a_n(1+x)^n}{x^{n+1}(1+x)^{n+1}} - (n+1)a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}} \\
&= \frac{T_{n+1}(x)}{x^{n+1}(1+x)^{n+1}} + a_{n+1} \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1+1}}
\end{aligned}$$

où on a posé $T_{n+1}(X) = T_n'(X)X(1+X) - n(2X+1)T_n(X) + a_n(1+X)^n$ qui est un polynôme comme somme et produit de polynôme et $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ ce qui achève la récurrence.
En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n et un réel a_n tel que pour tout $x \in D$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{x^n(1+x)^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}.$$

9. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $a_n = (-1)^n n!$. Pour $n = 0$, on sait que $a_0 = 1 = (-1)^0 0!$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a_n = (-1)^n n!$. On a

$$a_{n+1} = -(n+1)a_n = -(n+1)(-1)^n n! = (-1)^{n+1}(n+1)!$$

ce qui achève la récurrence. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n n!$.

Exercice 2 : Puissance d'une matrice.

---

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Dans la base canonique, la matrice de $f\big((x,y,z)\big)$ est $A \times \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ donc

$$f((x,y,z)) = (4x-2y-2z, x-z, 3x-2y-z).$$

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y-2z=0 \\ x-z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ 4x-2y-2z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ -2y+2z=0 \\ -2y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \\ z=z \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ et comme $\big((1,1,1)\big)$ est une famille constituée d'un vecteur non nul, celle-ci est une base de $\ker(f)$ qui est donc de dimension 1.

3. Par le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$ et
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((4,1,3),(-2,0,-2),(-2,-1,-1)\big) = Vect\big((4,1,3),(-2,0,-2)\big)$$
car $(-2,-1,-1) = -(4,1,3) + (-2,0,-2)$. Comme f est de rang 2, la famille $\big((4,1,3),(-2,0,-2)\big)$ forme donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. La matrice A est de rang $2 < 3$ donc A n'est pas inversible.
5. On a, par linéarité de f,
$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= (4,1,3) + (-2,0,-2) + (-2,-1,-1) = (4-2-2, 1+0+-1, 3-2-1) = (0,0,0) \end{aligned}$$
De façon analogue, $f(\varepsilon_2) = f(e_2) - f(e_3) = (0,1,-1) = \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = f(e_1) + f(e_3) = (2,0,2) = 2\varepsilon_3$.
6. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_3 = (0,0,0)$. On obtient
$$(0,0,0) = \lambda(e_1+e_2+e_3) + \mu(e_2-e_3) + \nu(e_1+e_3) = (\lambda+\nu)e_1 + (\lambda+\mu)e_2 + (\lambda-\mu+\nu)e_3.$$
Or la famille (e_1, e_2, e_3) étant une base, elle est libre et on a le système
$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu + \nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}$$
Finalement, la famille $\mathscr{B}'$ est libre, et c'est une famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, donc $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Par définition des matrices de passage, on a
$$P = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
8. On calcule P^{-1} en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss et par la question 5, on connait la matrice de f exprimée dans la base $\mathscr{B}'$ ce qui donne
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathscr{M}at_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$
Par la formule du changement de base pour les applications linéaires, on a $A = PDP^{-1}$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$
10. En calculant le produit matriciel, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^n \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^{n+1}-1 & -2^n & -2^n+1 \end{pmatrix}.$$
11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $P(D-\lambda I_3)P^{-1} = PDP^{-1} - \lambda PP^{-1} = A - \lambda I_3$ donc
$$\mathrm{rg}\big(P(D-\lambda I_3)P^{-1}\big) = \mathrm{rg}\big(D-\lambda I_3\big) = \mathrm{rg}\big(A-\lambda I_3\big).$$
Ainsi, $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $D - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Or
$$D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
est une matrice diagonale : $D - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $-\lambda = 0$ ou $1-\lambda$ ou $2-\lambda = 0$ c'est-à-dire $\lambda \in \{0,1,2\}$. En conclusion, $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{0,1,2\}$.

12. Notons $D' = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{smallmatrix}\right)$ où $a, b, c \in \mathbb{C}$. Comme dans la question précédente,

$$D' - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{pmatrix}$$

donc $D' - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $a - \lambda = 0$ ou $b - \lambda = 0$ ou $c - \lambda = 0$. De plus, comme

$$\mathrm{rg}\big(D - \lambda I_3\big) = \mathrm{rg}\big(D' - \lambda I_3\big),$$

la matrice $D' - \lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.
Lorsque $\lambda = 1$, a, b ou c est égal à 1. De plus, comme $\mathrm{rg}(D' - I_3) = \mathrm{rg}(D - I_3) = 2$, nécessairement les deux autres coefficients sont différents de 1 (b et c si $a = 1$, a et c si $b = 1$ et a et b si $c = 1$). En raisonnant de façon analogue pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$, on obtient que les coefficients diagonaux de D' sont $0, 1, 2$ où chaque coefficient apparaît une seule fois.

Problème 1 : Interpolation polynomiale.

Partie I : Polynômes de Tchebytchev

1. La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ donc, comme cos est définie sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est définie sur $D = [-1, 1]$.
2. On a, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\varphi_0(x) = \cos(0) = 1$ et $\varphi_1(x) = \cos\big(\arccos(x)\big) = x$ ainsi que, comme pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\cos(2y) = 2\cos^2(y) - 1$:

$$\varphi_2(x) = \cos^2(2\arccos x) - 1 = 2\cos\big(\underbrace{\arccos(\cos x)}_{=x}\big)^2 - 1 = 2x^2 - 1.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi]$. Comme arccos est la fonction réciproque de la restriction de la fonction cos sur $[0, \pi]$, on a :

$$\varphi_n\big(\cos(x)\big) = \cos\big(n\underbrace{\arccos(\cos x)}_{=x}\big) = \cos(nx).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos\big((n+1)y\big) + \cos\big((n-1)y\big) = 2\cos\left(\frac{(n+1)x + (n-1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x - (n-1)x}{2}\right) = 2\cos(nx)\cos(x).$$

Soit $x \in [-1, 1]$. On a, avec l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) &= \cos\big((n+1)\arccos(x)\big) \\ &= 2\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) - \cos\big((n-1)\arccos x\big) \\ &= 2\varphi_n(x)x - \varphi_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\varphi_{n+1}(x) = 2x\,\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x).$$

5. On procède par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, φ_0 est constante en 1 et pour $n = 1$, φ_1 est l'identité sur $[-1, 1]$. Ainsi, φ_0 et φ_1 sont des fonctions polynomiales à coefficients entiers de degré respectifs 0 et 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout entier $k \leq n$, φ_k est une fonction polynomiale sur $[-1, 1]$ à coefficients entiers dont le degré est égal à k. On a, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\varphi_{n+1}(x) = 2x\,\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$$

donc φ_{n+1} est une différence de produit de fonctions polynomiales à coefficients entiers sur $[-1,1]$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, φ_{n+1} est une fonction polynomiale à coefficients entiers sur $[-1,1]$. De plus, en utilisant la même notation que pour les polynômes, comme $\deg(\varphi_{n-1}) < n$, on a :

$$\deg(\varphi_{n+1}) = \deg(2x\varphi_n) = \deg(2x) + \deg(\varphi_n) = 1 + n.$$

Par suite, φ_{n+1} est une fonction polynomiale sur $[-1,1]$ à coefficients entiers dont le degré est égal à $n+1$ ce qui achève la récurrence.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \in [-1,1]$, $Q_n(x) = \varphi_n(x)$. Ainsi, pour tout $x \in [-1,1]$, $Q_n(x) = T_n(x)$. Par suite, $Q_n - T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et s'annule sur $[-1,1]$ donc $Q_n - T_n$ possède une infinité de racines. Finalement, $Q_n - T_n$ est le polynôme nul c'est-à-dire $Q_n = T_n$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-1,1]$: $\varphi_{n+1}(x) = 2x\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$ donc pour tout $x \in [-1,1]$:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Ainsi le polynôme $T_{n+1}(X) - 2XT_n(X) + T_{n-1}(X)$ s'annule sur $[-1,1]$: il possède une infinté de racines donc c'est le polynôme nul. Finalement,

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

8. Avec la question 2, on a $T_0 = 1$, $T_1 = X$ donc $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Compte tenu de la relation

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X),$$

et du fait que $\deg(T_n) = n$, $\deg(T_{n-1}) = n-1$, on a $a_{n+1} = 2a_n$. La suite (a_n) est donc géométrique et $a_1 = 1$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = 2^{n-1}.$$

Partie II : Interpolation de Lagrange

9. L'application φ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha P + Q) &= \big((\alpha P + Q)(a_0), \dots, (\alpha P + Q)(a_n)\big) \\
&= \big(\alpha P(a_0) + Q(a_0), \dots, \alpha P(a_n) + Q(a_n)\big) \\
&= \alpha\big(P(a_0), \dots, \alpha P(a_n)\big) + \big(Q(a_0), \dots, Q(a_n)\big) = \alpha\varphi(P) + \varphi(Q)
\end{aligned}$$

donc φ est une application linéaire. Soit $P \in \ker(\varphi)$. On a $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P(a_0) = \cdots = P(a_n) = 0$. Ainsi, P est un polynôme de degré au plus n possédant au moins $n+1$ racines donc P est nul. Par suite, $\ker(\varphi) = \{0\}$. Par conséquent, φ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension $n+1$ donc φ est un isomorphisme.
10. Soit $i, j \in [\![0,n]\!]$. On a $\varphi(L_i) = e_{i+1}$ donc $L_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$ et $L_i(a_i) = 1$.
11. L'application φ^{-1} est un isomorphisme et $(L_0, \dots, L_n) = \big(\varphi^{-1}(e_1), \dots, \varphi^{-1}(e_{n+1})\big)$. L'image d'une base par un isomorphisme étant également une base, $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
12. On a $\big(f(a_0), \dots, f(a_n)\big) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Par bijectivité de l'application φ, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\big(f(a_0), \dots, f(a_n)\big) = \varphi(P) = \big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big)$ c'est-à-dire $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. De plus, on a, par linéarité de φ^{-1} :

$$P(X) = \varphi^{-1}\Big(\big(f(a_0), \dots, f(a_n)\big)\Big) = \varphi^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} f(a_i)e_{i+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} f(a_i)\varphi^{-1}(e_{i+1}) = \sum_{k=0}^{n} f(a_i)L_i(X).$$

Partie III : Points de Tchebytchev.

13. Le fonction f est continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc un $x_0 \in [-1,1]$ tel que pour tout $x \in [-1,1], |f(x)| \leq f(x_0) = M_f$
14. Soit $x \in [-1,1]$. Posons $u = \arccos(x)$. On a

$$|T_n(x)| = \left|T_n\big(\cos(u)\big)\right| = |\cos(nu)| \leq 1.$$

De plus, $|T_n(1)| = \left|T_n\big(\cos(0)\big)\right| = |\cos(n0)| = 1$. Finalement $M_{T_n} = 1$

14. Avec l'hypothèse proposée, on a, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < P(x) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

De plus, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k \in [-1,1]$ et $T_n(\alpha_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ donc

$$\frac{-1-(-1)^k}{2^{n-1}} < P(\alpha_k) - T_n(\alpha_k) < \frac{1-(-1)^k}{2^{n-1}}$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, lorsque k est impair, $0 = \frac{-1-(-1)^k}{2^{n-1}} + (-1)^k < P(\alpha_k) - T_n(\alpha_k)$ et lorsque k est pair $P(\alpha_k) - T_n(\alpha_k) < \frac{1-(-1)^k}{2^{n-1}} = 0$.

15. Comme P et $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ ont le même coefficient dominant 1, $\deg(P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n) < n$ donc $P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. La fonction $t \mapsto P(t) - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)$ est une fonction continue sur $[-1,1]$. De plus avec la question précédente, elle change de signe sur sur chaque intervalle $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule au moins une fois sur chaque intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ puis au moins n fois sur $[-1,1]$.
16. Avec la question précédente, $P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n$ est le polynôme nul c'est-à-dire $P = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$. On obtient

$$M_P = M_{\frac{1}{2^{n-1}}T_n} = \frac{1}{2^{n-1}}M_{T_n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

ce qui est absurde compte tenu de l'hypothèse $M_P < \frac{1}{2^{n-1}}$. On déduit des questions précédentes que pour tout polynôme P de coefficient dominant 1 et de degré n, on a

$$M_P \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

et $M_{\frac{1}{2^{n-1}}T_n} = 1$. Ainsi, la borne inférieure des valeurs M_P lorsque P décrit l'ensemble des polynômes de coefficient dominant 1 et de degré n est $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Partie IV : Majoration de l'erreur.

17. Soit g une fonction de classe de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et s'annulant au moins $n+2$ fois sur $[-1,1]$. Montrons par récurrence sur $k \in [\![0,n+1]\!]$ que pour tout $k \in [\![0,n+1]\!]$, $g^{(k)}$ s'annule au moins $n+2-k$ fois.

Pour $k = 0$, par hypothèse, $g^{(0)} = g$ s'annule au moins $n+2$ fois.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On suppose que $g^{(k)}$ s'annule au moins $n+2-k$ fois. Il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2-k} \in [-1,1]$ tel que $g^{(k)}(\alpha_1) = \cdots = g^{(k)}(\alpha_{n+2-k}) = 0$. Soit $i \in [\![1,n+1-k]\!]$. La fonction $g^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. Par le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $g^{(k+1)}(\beta_i) = 0$. Ainsi, $g^{(k+1)}$ s'annule au moins $n+1-k = n+2-(k+1)$ fois ce qui achève la récurrence.

En appliquant le résultat précédent pour $k = n+1$, $g^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $|-1,1]$: il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que

$$g^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

18. Soit $x \in [-1,1]$. Si $x \in \{a_0, \dots, a_n\}$, $f(x) = P(x)$ et $\Pi_{n+1}(x) = 0$ donc n'importe quel $\xi \in [-1,1]$ convient. On suppose que $x \notin \{a_0, \dots, a_n\}$ et on pose :

$$g : t \mapsto f(t) - P(t) - K\Pi_{n+1}(t)$$

où $K = \frac{f(x)-P(x)}{\Pi_{n+1}(x)}$. On a $g(x) = 0$. Ainsi, par somme, g est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en $a_0, \dots, a_n$ et x donc au moins $n+2$ fois. Par la question précédente, il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ ce qui s'écrit :

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \underbrace{P^{(n+1)}(\xi)}_{=0} - K\underbrace{\Pi_{n+1}^{(n+1)}(\xi)}_{=(n+1)!}.$$

Par conséquent, $K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. En conclusion,

$$f(x) - P(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

19. Soit $x \in [-1,1]$. On a, avec l'égalité précédente

$$|f(x) - P(x)| = \frac{1}{(n+1)!}|\Pi_{n+1}(x)|\,|f^{(n+1)}(\xi)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{\Pi_n} M_{f^{(n+1)}}.$$

Ainsi, l'inégalité précédente étant vraie pour tout $x \in [-1,1]$:

$$M_{f-P} \leq \frac{M_{\Pi_n} M_{f^{(n+1)}}}{(n+1)!}.$$

De plus, on sait que $M_{\Pi_n} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ par la partie III. Ainsi, pour minimiser la quantité M_{Π_n}, on peut prendre $a_0, \dots, a_n$ les racines du polynôme T_n pour avoir M_{Π_n} minimal et obtenir :

$$M_{f-P} \leq \frac{M_{f^{(n+1)}}}{2^{n-1}(n+1)!}.$$

Problème 2 : Racines p-ièmes de matrices en dimension 2.

Partie I : Questions préliminaires

1. Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Si v n'est pas un isomorphisme alors v n'est pas injectif donc $\ker(v) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ puis $\dim\big(\ker(v)\big) \geq 1$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences :

$$z^2 = 1 \Longleftrightarrow z \in \{-1, 1\}$$

et

$$z^3 = 1 \Longleftrightarrow z \in \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\} \Longleftrightarrow z \in \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

La première équation possède deux solutions et la seconde, trois solutions.

3. On a : $\mathscr{S}_1 = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \,|\, X = I_2\} = \{I_2\}$. L'ensemble $\mathscr{S}_1$ possède un seul élement.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On a $I_2^p = I_2$ donc $I_2 \in \mathscr{S}_p \neq \emptyset$.
Si $X \in \mathscr{S}_p$ alors $X^p = I_2$ puis $(2X)^p = 2^p X^p = 2^p I_2 \neq I_2$ donc $2I_2 \in\notin \mathscr{S}_p$. Ainsi, $\mathscr{S}_p$ n'est pas un espace vectoriel.
5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathscr{S}_p$. On a : $XX^{p-1} = X^p = I_2$ donc X est inversible et $X^{-1} = X^{p-1}$.

Partie II : Quelques exemples

6. On a, en calculant, $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^2 = I_2$ donc $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{S}_2$. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a, à nouveau en calculant,

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2$$

donc $\left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\\ \frac{1}{\alpha} & 0\end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{S}_2$. L'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \frac{1}{\alpha}\end{smallmatrix}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est infini donc $\mathscr{S}_2$ est infini.

7. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On a les équivalences :

$$\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{S}_2 \Longleftrightarrow \left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{smallmatrix}\right)^2 = I_2 \Longleftrightarrow \left(\begin{smallmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{smallmatrix}\right) = I_2 \Longleftrightarrow a^2 = b^2 = 1.$$

Par suite, $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{S}_2$ si et seulement si $a, b \in \{-1, 1\}$.
Finalement, $\mathscr{S}_2 \cap \mathscr{D} = \left\{I_2, -I_2, \left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\right\}$: cet ensemble possède quatre éléments.

8. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On a, comme à la question précédente, les équivalences,

$$\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{S}_3 \Longleftrightarrow \left(\begin{smallmatrix}a^3 & 0\\ 0 & b^3\end{smallmatrix}\right) = I_2 \Longleftrightarrow a, b \in \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Ainsi, en notant $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}$, on a :

$$\mathscr{S}_3 \cap \mathscr{D} = \left\{I_2, \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & j\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \bar{j}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}j & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), jI_2, \left(\begin{smallmatrix}j & 0\\ 0 & \bar{j}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\bar{j} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\bar{j} & 0\\ 0 & j\end{smallmatrix}\right), \bar{j}I_2\right\}.$$

L'ensemble $\mathscr{S}_3 \cap \mathscr{D}$ possède neuf éléments.

Partie III : Matrices diagonales et matrices de Jordan de $\mathscr{S}_p$

9. Soit $X \in \mathscr{D}$ une matrice diagonale. Il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $X = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$. Ainsi, on a les équivalences :

$$\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{S}_p \Longleftrightarrow \left(\begin{smallmatrix}a^p & 0\\ 0 & b^p\end{smallmatrix}\right) = I_2 \Longleftrightarrow a^p = b^p = 1.$$

Par suite, $X \in \mathscr{S}_p$ si et seulement si a, b sont des racines p-ièmes de l'unité. Finalement, $X \in \mathscr{S}_p$ si et seulement si il existe $k, \ell \in [\![1, p]\!]$ tel que :

$$X = \begin{pmatrix} e^{\frac{2ik\pi}{p}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\ell\pi}{p}} \end{pmatrix}.$$

10. Avec les notations de la question précédente, a et b prennent indépendemment p valeurs distinctes donc $\mathscr{D} \cap \mathscr{S}_p$ est fini et cet ensemble comporte $p \times p = p^2$ éléments.

11. Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère

$$X' = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Raisonnons par l'abusrde en supposant que $X' \in \mathscr{S}_2$. On aurait :

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = I_2$$

puis $a^2 = 1$ et $2a = 0$ ce qui est impossible car $0^2 \neq 1$. En conclusion, $X' \notin \mathscr{S}_2$.

12. On suppose que $p \geq 2$. On utilise la notations de la question précédente et on raisonne par l'absurde en supposant que $X' \in \mathscr{S}_2$. On a $aI_2\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)(aI_2)$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(X')^p = \left(aI_2 + \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \underbrace{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)^k}_{=O_{2,2} \text{ pour } k \geq 2} (aI_2)^{p-k} = a^p I_2 + pa^{p-1}\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right).$$

On a donc $a^p = 1$ et $a^{p-1} = 0$ ce qui impossible car $0^p \neq 1$. Ainsi, $X' \notin \mathscr{S}_p$.

Partie IV : Trigonalisation des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

13. Par le calcul, on a $M^2-(a+b)M+(ad-bc)I_2=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ donc $u^2-(a+b)u+(ad-bc)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
14. Avec les relations coefficients racines, on a : $a+b=\lambda_1+\lambda_2$ et $ad-bc=\lambda_1\lambda_2$.
15. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\dim\big(\ker(u-\lambda_1\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\big)=0$ et $\dim\big(\ker(u-\lambda_2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\big)=0$. Dans ce cas, pour $i=1,2$, $u-\lambda_2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est un isomorphisme donc $(u-\lambda_1\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\circ(u-\lambda_2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ est également un isomorphisme. Or :
$$(u-\lambda_1\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\circ(u-\lambda_2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})=u^2-(a+b)u+(ad-bc)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}.$$
Ceci impliquerait que l'application nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ serait un isomorphisme ce qui est faux. En conclusion, $\dim\big(\ker(u-\lambda_1\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\big)\geq 1$ ou $\dim\big(\ker(u-\lambda_2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\big)\geq 1$.
16. Si $\dim\big(\ker(u-\lambda_1\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\big)=2$, on considère (e_1,e_2) une base de $\ker(u-\lambda_1\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ qui est aussi une base de $\mathbb{R}^2$. Si $\dim\big(\ker(u-\lambda_1\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\big)=1$, on considère (e_1) une base de $\ker(u-\lambda_1\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ qu'on complète avec un vecteur e_2 en une base de $\mathbb{R}^2$ par le théorème de la base incomplète. Comme (e_1,e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tel que $u(e_2)=\alpha e_1+\beta e_2$.
17. On a :
$$u^2(e_2)=u\big(u(e_2)\big)=u(\alpha e_1+\beta e_2)=\alpha u(e_1)+\beta u(e_2)=\alpha\lambda_1 e_1+\beta(\alpha e_1+\beta e_2)=(\alpha\lambda_1+\alpha\beta)e_1+\beta^2 e_2$$
et, comme $u^2-(a+b)u+(ad-bc)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est l'application nulle,
$$u^2(e_2)=(a+b)u(e_2)-(ad-bc)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(e_2)=(\lambda_1+\lambda_2)u(e_2)-(\lambda_1\lambda_2)e_2=(\lambda_1+\lambda_2)(\alpha e_1+\beta e_2)-(\lambda_1\lambda_2)e_2$$
donc
$$u^2(e_2)=(\lambda_1+\lambda_2)\alpha e_1+[(\lambda_1+\lambda_2)\beta-\lambda_1\lambda_2]e_2.$$
18. Par liberté de (e_1,e_2), on a
$$(\lambda_1+\lambda_2)\beta-\lambda_1\lambda_2=\beta^2$$
donc $Q(\beta)=\beta^2-(\lambda_1+\lambda_2)\beta+\lambda_1\lambda_2=0$. On en déduit que β est une racine de Q donc que $\beta=\lambda_1$ ou $\beta=\lambda_2$ et enfin $u(e_2)=\alpha e_1+\lambda_1 e_2$ ou $u(e_2)=\alpha e_1+\lambda_2 e_2$.
19. Notons M' la matrice de u de la base (e_1,e_2) vers la base (e_1,e_2). On a, selon les cas précédents,
$$M'=\begin{pmatrix}\lambda_1&\alpha\\0&\lambda_1\end{pmatrix}\quad\text{ou}\quad M'=\begin{pmatrix}\lambda_1&\alpha\\0&\lambda_2\end{pmatrix}.$$
20. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à (e_1,e_2), on a, avec les notations des questions précédentes, selon les deux cas de deux questions précédentes :
$$PMP^{-1}=M'=\begin{pmatrix}\lambda_1&\alpha\\0&\lambda_1\end{pmatrix}\quad\text{ou}\quad PMP^{-1}=M'=\begin{pmatrix}\lambda_1&\alpha\\0&\lambda_2\end{pmatrix}.$$
La matrice P est inversible en tant que matrice de passage.

Partie V : Détermination de $\mathscr{S}_p$

21. Soit $X\in\mathscr{S}_p$. Avec la question précédente, il existe une matrice $P\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ inversible et $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ (éventuellement $\lambda_1=\lambda_2$) tel que
$$PXP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\alpha\\0&\lambda_2\end{pmatrix}.$$
Montrons que $\alpha=0$. Comme $X\in\mathscr{S}_p$, on a :
$$(PXP^{-1})^p=PX^pP^{-1}=PI_2P^{-1}=I_2$$

donc $\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & \alpha\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right)^p = I_2$. Or, comme dans la question 11,

$$\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & \alpha\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \underbrace{\left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)^k}_{=O_{2,2} \text{ pour } k \geq 2} \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right)^{p-k} = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1^p & 0\\ 0 & \lambda_2^p\end{smallmatrix}\right) + p\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1^{p-1} & \alpha\\ 0 & \lambda_2^{p-1}\end{smallmatrix}\right) = I_2.$$

Par suite $p\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$. Finalement, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ inversible et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tel que

$$PXP^{-1} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

22. Avec les notations de la question précédente, si $X \in \mathscr{S}_p$, on a :

$$(PXP^{-1})^p = PX^pP^{-1} = PI_2P^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1^p & 0\\ 0 & \lambda_2^p\end{smallmatrix}\right) = I_2$$

donc $\lambda_1^p = \lambda_2^p = 1$.

23. Soit $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Avec les questions précédentes, on a les équivalences successives :

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{S}_p &\iff \exists P \in \mathscr{G}\ell_2(\mathbb{C}), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad PXP^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1^p & 0\\ 0 & \lambda_2^p\end{smallmatrix}\right) \text{ et } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ &\iff \exists P \in \mathscr{G}\ell_2(\mathbb{C}), k, \ell \in [\![1, p]\!], \quad PXP^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right) \text{ et } \lambda_1 = e^{\frac{2ik\pi}{p}}, \lambda_2 = e^{\frac{2i\ell\pi}{p}} \end{aligned}$$

donc

$$\mathscr{S}_p = \left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\frac{2ik\pi}{p}} & 0\\ 0 & e^{\frac{2i\ell\pi}{p}} \end{pmatrix} P \,|\, k, \ell \in [\![1, p]\!], P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}), P \text{ inversible} \right\}.$$