

Valider les performances globales d'un système (partie 1)

PCSI 2018-2019

Table des matières

Introduction.....	2
1. Évaluer les performances d'un système continu à partir sa réponse expérimentale ou simulée ..	3
1.1 Fondamentaux, généralités.....	3
1.2 Stabilité et dépassement.....	4
1.3 Analyse de la rapidité du système avec le temps de réponse à 5%.....	6
1.4 Caractérisation de la précision avec l'erreur en régime permanent.....	7
2. Prévoir le comportement d'un Système Continu Linéaire et Invariant à partir de son modèle.....	8
Pour prédire les performances d'un système, il faut d'abord en avoir un modèle.....	8
2.1 Modéliser un SLCI par une fonction de transfert.....	8
2.2 Prévoir le comportement en stabilité.....	11
2.3 Prévoir le comportement en rapidité.....	14
2.4 Prévoir le comportement en précision.....	14
3. Réponses à un échelon des modèles usuels.....	16
3.1 Réponse des modèles proportionnel, dérivateur et intégrateur.....	16
3.2 Réponse d'un modèle de 1 ^{er} ordre.....	17
3.3 Réponse d'un modèle de 2 nd ordre.....	18
3.4 Réponse d'un modèle à retard.....	21
4. Identifier un modèle de comportement d'un système à partir de sa réponse expérimentale	22
4.1 Principe.....	22
4.2 Modéliser le comportement par un 1 ^{er} ordre (identification des paramètres K et τ).....	23
4.3 Modéliser le comportement par un 2 nd ordre oscillatoire (identification de K, z et ω_0).....	24
4.4 Modéliser le comportement par un 2 nd ordre apériodique (identification de K, z et ω_0).....	26
5. Déterminer le modèle de connaissance d'un SLCI asservi non perturbé.....	28
5.1 Système asservi :.....	28
5.2 Utilisation de schémas-blocs.....	29
5.3 Du schéma-bloc à la fonction de transfert globale d'un système asservi.....	32
6. Déterminer le modèle de connaissance d'un SLCI perturbé.....	34
6.1 Perturbations.....	34
6.2 Cas d'un modèle à plusieurs entrées : théorème de superposition.....	35
6.3 Simplification de schéma-bloc avec boucles dépendantes.....	36
6.4 Stabilité et précision d'un modèle perturbé.....	36
Sources.....	36

Introduction

Dans le premier chapitre de l'année (Analyser un système), nous avons vu qu'avec la chaîne d'information et la chaîne d'énergie, il est possible de réaliser différentes activités plus ou moins complexes. Grâce à la partie commande ainsi que les différents capteurs (permettant de vérifier que nos actions correspondent bien à nos attentes), les systèmes peuvent fonctionner de façon autonome. Il s'agit alors de systèmes automatisés. Ces derniers sont utilisés pour réaliser différentes tâches :

- Trop complexes ou dangereuses pour l'homme ;



Robot d'assistance pour le démantèlement de réacteurs nucléaires



Laser correcteur de vue

- Trop répétitives et pénibles ;



Robot "pick and place" de chaîne de production



Robot guide d'un grand complexe financier

Pour ces différents systèmes, l'intervention de l'homme est limitée à la **programmation** de l'unité de commande, la mise en marche et les **réglages** de certains **paramètres**.

À partir d'un **modèle du système** (sous forme d'équations), il est possible **d'évaluer ses performances** dans le but d'anticiper son comportement réel et vérifier s'il est capable de répondre aux **exigences** du **cahier des charges**.

Bien que de nombreux systèmes utilisent actuellement des échanges et un traitement des informations sous forme numérique, ce cours permettra de traiter uniquement le cas des systèmes continus. Dans un **système continu**, les **grandeurs d'entrée** et de **sortie** évoluent de manière **continue** en fonction du **temps**. Il s'agit donc de grandeurs analogiques.

1. Évaluer les performances d'un système continu à partir sa réponse expérimentale ou simulée

Afin d'évaluer les performances de **stabilité, rapidité et précision** d'un système soumis à une entrée test, des critères d'évaluation ont été définis : **dépassement, temps de réponse à 5% et erreur en régime permanent.**

L'objectif « d'amélioration d'un système » est d'obtenir, à l'aide de **réglages**, le **meilleur compromis** entre les différents critères de performances, qui sont souvent contradictoires.

1.1 Fondamentaux et généralités des systèmes continus

Performance d'un système continu

Afin de répondre au mieux aux besoins de l'utilisateur, un système doit présenter des performances les plus proches possibles de celles définies dans le **cahier des charges**. Les **performances** sont :

- la **stabilité**, propriété de convergence temporelle (et asymptotique) vers un **état d'équilibre** ;
- la **rapidité**, caractérisant la vitesse de réaction aux variations de l'entrée des systèmes stables ;
- la **précision**, aptitude des systèmes stables à présenter une sortie qui tende vers la valeur attendue.



Robot delta flexpicker utilisé dans l'industrie agroalimentaire afin de répondre à des exigences de vitesse et précision importante.

Les principales entrées d'un système continu (entrée test)

Les performances d'un système sont évaluées expérimentalement, ou prédites par simulation, lorsque le système est soumis à des signaux tests en entrée. Ces signaux tests envoyés en entrée sont :



<p>• L'échelon : entrée constante</p> <p>Thermostat</p>	<p>• L'impulsion : entrée très brève</p> <p>Air bag</p>
<p>• La rampe : entrée linéairement variable</p> <p>Traker solaire</p>	<p>• La sinusoïde</p> <p>Suspension</p>

Par convention, tous ces signaux sont nuls pour t négatif : $e(t)=0$ pour $t < 0$

Remarque : Les performances d'un système indépendantes de l'entrée.

Valeurs caractéristiques d'un système continu

Trois valeurs sont importantes pour l'analyse d'un système :

- la valeur initiale ;
- la valeur finale ;
- la variation totale.

La **valeur initiale de la grandeur d'entrée** est notée $e(t_{init})$.

La **valeur initiale de la grandeur de sortie** est notée $s(t_{init})$.

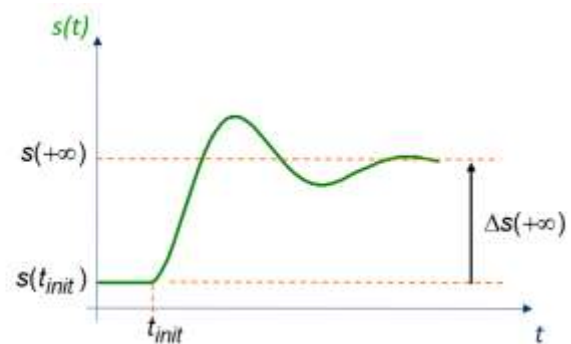
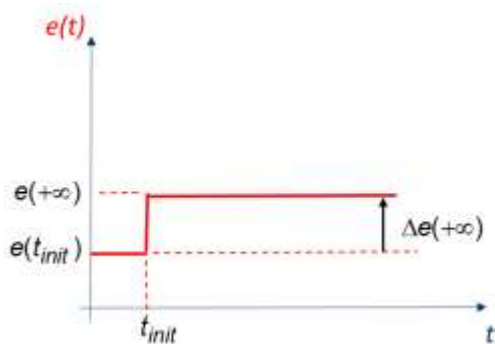
Si $t_{init} = 0$ alors les valeurs initiales sont $e(0)$ et $s(0)$.

Les **valeurs finales des grandeurs d'entrée et de sortie**, correspondent aux valeurs de l'entrée et de la sortie du système **en régime permanent**, soit pour un **temps** suffisamment **grand** ("tendant vers l'infini"). Elles sont notées $e(+\infty)$ et $s(+\infty)$ avec :

$$e(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) \qquad s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$$

La **variation totale** de la grandeur d'entrée est : $\Delta e(+\infty) = e(+\infty) - e(t_{init})$.

La **variation totale** de la grandeur de sortie est : $\Delta s(+\infty) = s(+\infty) - s(t_{init})$.



1.2 Stabilité et dépassement

Pour certains systèmes, il est impératif qu'il n'y ait aucun dépassement.

Exemple : l'arrimage du vaisseau Soyuz à la station spatiale ISS (risque de collision).

On dit qu'un système est stable si, **pour une entrée en échelon**, la grandeur de sortie **converge** vers une **valeur finale constante** (entrée bornée – sortie bornée). La stabilité est la performance qu'il faut évaluer en premier car un système instable est inutilisable.



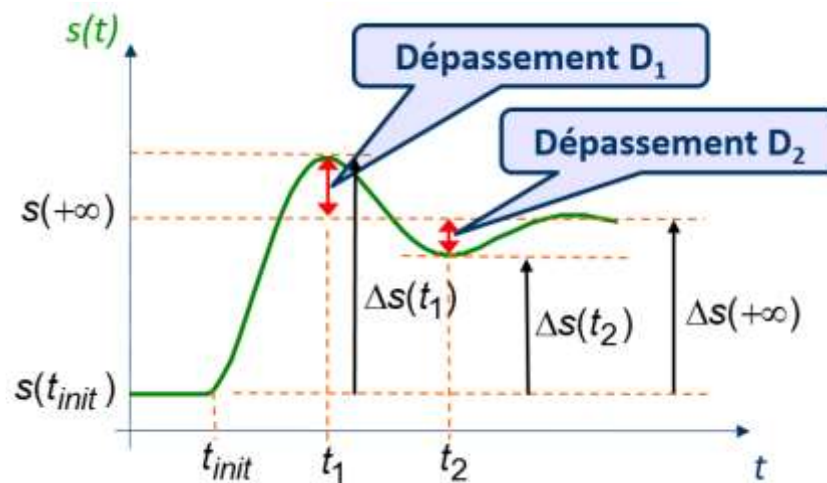
Une sortie (ou une réponse) présente un **dépassement** si, pour une entrée en échelon, la grandeur de sortie dépasse sa **valeur finale à un instant donné**. La courbe de sortie présente alors un extrémum.

La stabilité est alors caractérisée par le **nombre de dépassements** et/ou **l'amplitude du premier dépassement** (le plus critique), noté **DI**, par rapport à la valeur finale :

- le **dépassement absolu** d'ordre k vaut $D_k = |\Delta s(t_k) - \Delta s(+\infty)|$ donc $D_1 = |\Delta s(t_1) - \Delta s(+\infty)|$ avec t_1 la durée pour obtenir le premier dépassement ;

- le **dépassement relatif** d'ordre k vaut $D_{k\%} = \left| \frac{D_k}{\Delta s(+\infty)} \right|$ donc $D_{1\%} = \left| \frac{D_1}{\Delta s(+\infty)} \right|$

Réponse d'un système pour une entrée test en échelon :



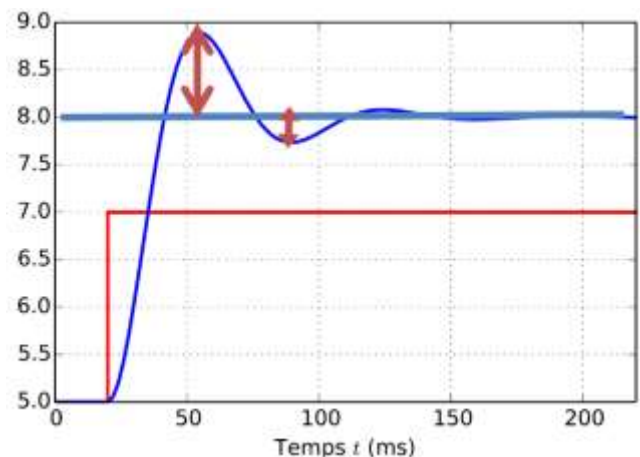
Exemple : Le graphique ci-contre représente la réponse d'un système à une entrée en échelon.

1/ Le système est stable car pour une entrée en échelon, la sortie converge vers une valeur constante (entrée bornée – sortie bornée).

2/ Nombre de dépassements visibles « à l'oeil » : 3 ou 4

$D1 = |8,9 - 8| = 0,9$
 et $D1\% = |0,9/8| = 0,1125 = 11,25\%$

$D2 = |7,75 - 8| = 0,25$
 et $D2\% = |0,25/8| = 0,0313 = 3,13\%$



Attention à certains systèmes réels :

Un système réel instable oscille jusqu'à sa destruction. Ces oscillations sont dans le cas général **limitées par les différentes saturations** (limites des amplificateurs opérationnels, butées physiques...). Ces limitations physiques peuvent laisser croire que le système est stable alors que non.

1.3 Analyse de la rapidité du système avec le temps de réponse à 5%



Pour certains systèmes, il est impératif que la réaction du système soit très rapide.

Exemple : Système d'air bag

À condition que le **système soit stable**, la **rapidité** est caractérisée, pour une **entrée en échelon**, par la durée que met le système pour que la **sortie soit suffisamment proche de sa valeur finale** et ne plus s'en éloigner.

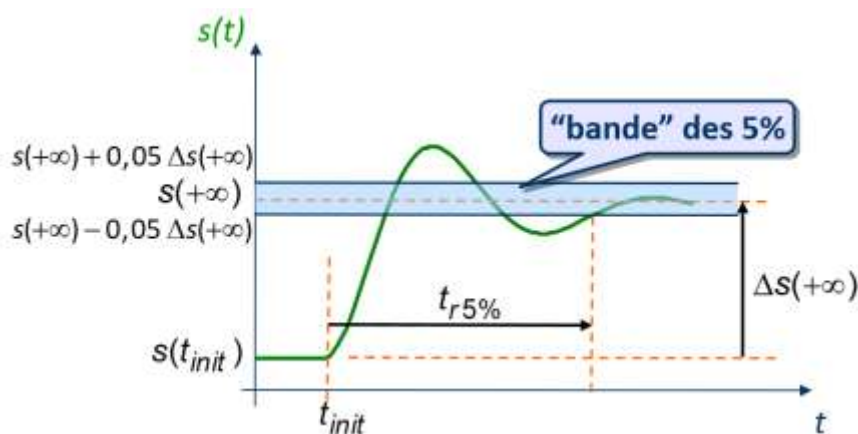
Par convention, le critère caractérisant la **rapidité** est le **temps de réponse à 5%** noté $t_{r5\%}$

On définit la **bande des 5%** par l'intervalle :

$$[s(+\infty) - 0,05 \Delta s(+\infty) ; s(+\infty) + 0,05 \Delta s(+\infty)]$$

Le temps de réponse à 5% est la **durée** mise par la grandeur de sortie pour rentrer dans cette bande et ne **plus en sortir**.

Réponse d'un système pour une entrée test en échelon :



Exemple : Le graphique ci-contre représente la réponse d'un système à une entrée en échelon.

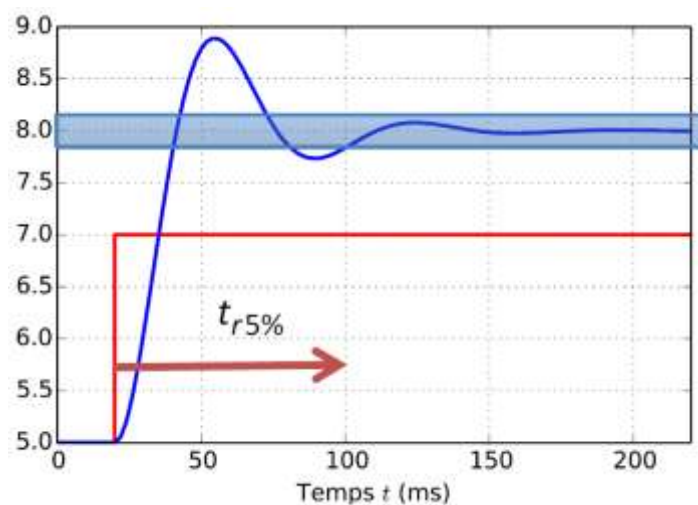
La valeur finale est : $s(+\infty) = 8$.

La variation totale de la sortie vaut : $\Delta s(+\infty) = 8 - 5 = 3$.

La "bande des 5%" correspond à l'intervalle : $[8 - 0,05 \cdot 3 ; 8 + 0,05 \cdot 3]$, soit $[7,85 ; 8,15]$.

Le signal de sorti reste dans la bande à partir de $t=100$ ms. La sollicitation débutant à $t=20$ ms, on obtient :

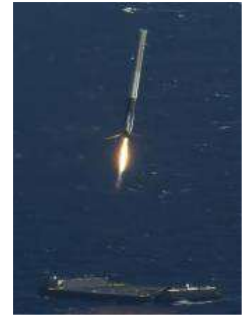
$$t_{r5\%} = 100 - 20 = 80 \text{ ms.}$$



1.4 Caractérisation de la précision avec l'erreur en régime permanent

Pour certains systèmes, il est impératif que la précision du système soit excellente.

Exemple : Lanceur de fusée Space X récupéré en pleine mer



À condition que le système soit stable, la précision est définie que pour un système ayant des grandeurs d'entrée et de sortie de même nature et comparables. Dans ce cas l'entrée est appelée consigne.

L'erreur notée $e_r(t)$ est la différence, à chaque instant, entre la variation souhaitée $\Delta cons(t)$ (=consigne) et la variation réelle de la sortie $\Delta s(t)$ par la sortie : $e_r(t) = \Delta cons(t) - \Delta s(t)$.

Si le système est stable et que l'entrée et la sortie sont de même nature, la **précision** est caractérisée par :

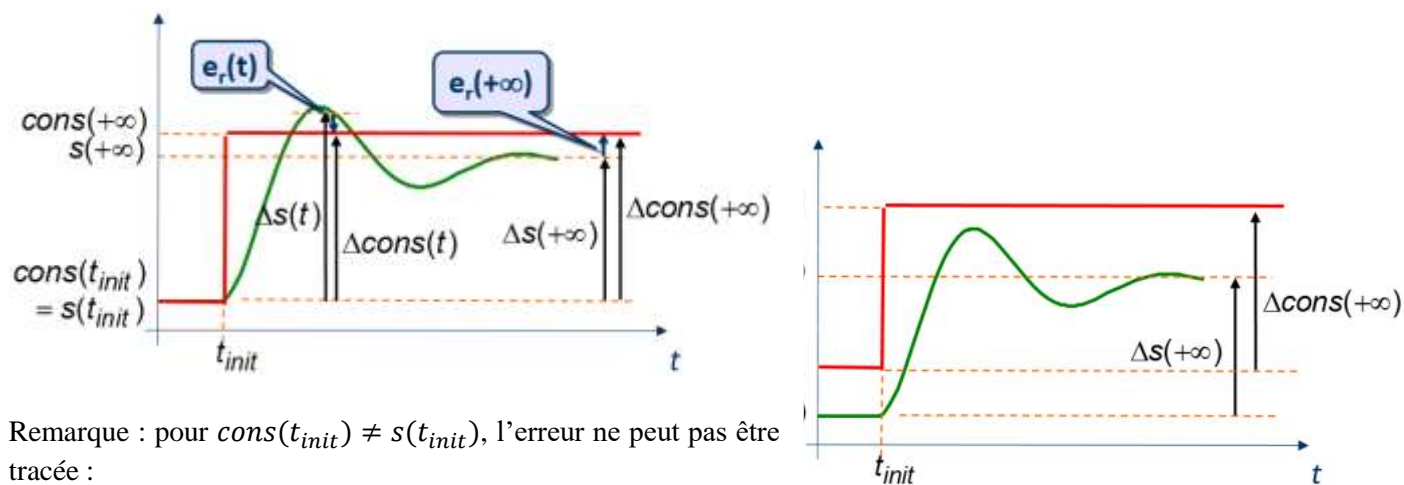
- l'erreur en régime permanent (ou **erreur statique**) : $e_r(+\infty) = \Delta cons(+\infty) - \Delta s(+\infty)$

- ou par l'erreur relative en régime permanent (ou **erreur statique relative**), pour une consigne en échelon :

$$e_{r\%}(+\infty) = \left| \frac{e_r(+\infty)}{\Delta cons(+\infty)} \right|$$

NB : l'erreur statique relative n'est pas définie pour une consigne en rampe.

Réponse d'un système pour une entrée test en échelon :



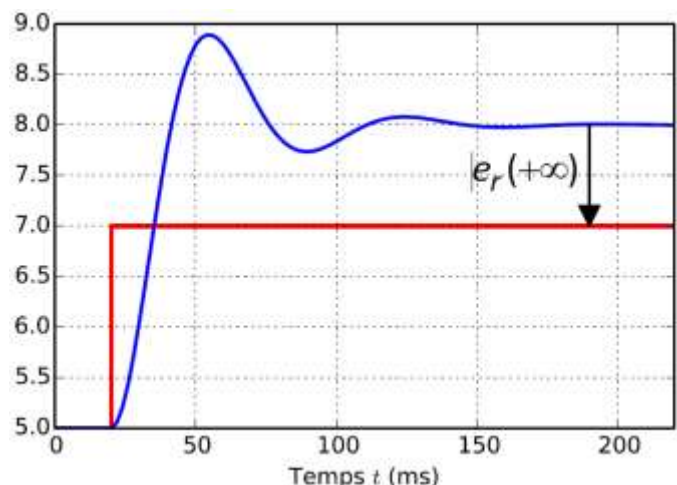
Remarque : pour $cons(t_{init}) \neq s(t_{init})$, l'erreur ne peut pas être tracée :

Exemple : Le graphique ci-contre représente la réponse d'un système à une entrée en échelon.

On suppose que les grandeurs d'entrée et de sortie sont comparables.

$$e_r(+\infty) = \Delta cons(+\infty) - \Delta s(+\infty) = 7 - 8 = -1$$

$$e_{r\%}(+\infty) = \left| \frac{e_r(+\infty)}{\Delta cons(+\infty)} \right| = \left| \frac{-1}{7} \right| = 0,14 = 14\%$$



2. Prévoir le comportement d'un Système Continu Linéaire et Invariant à partir de son modèle

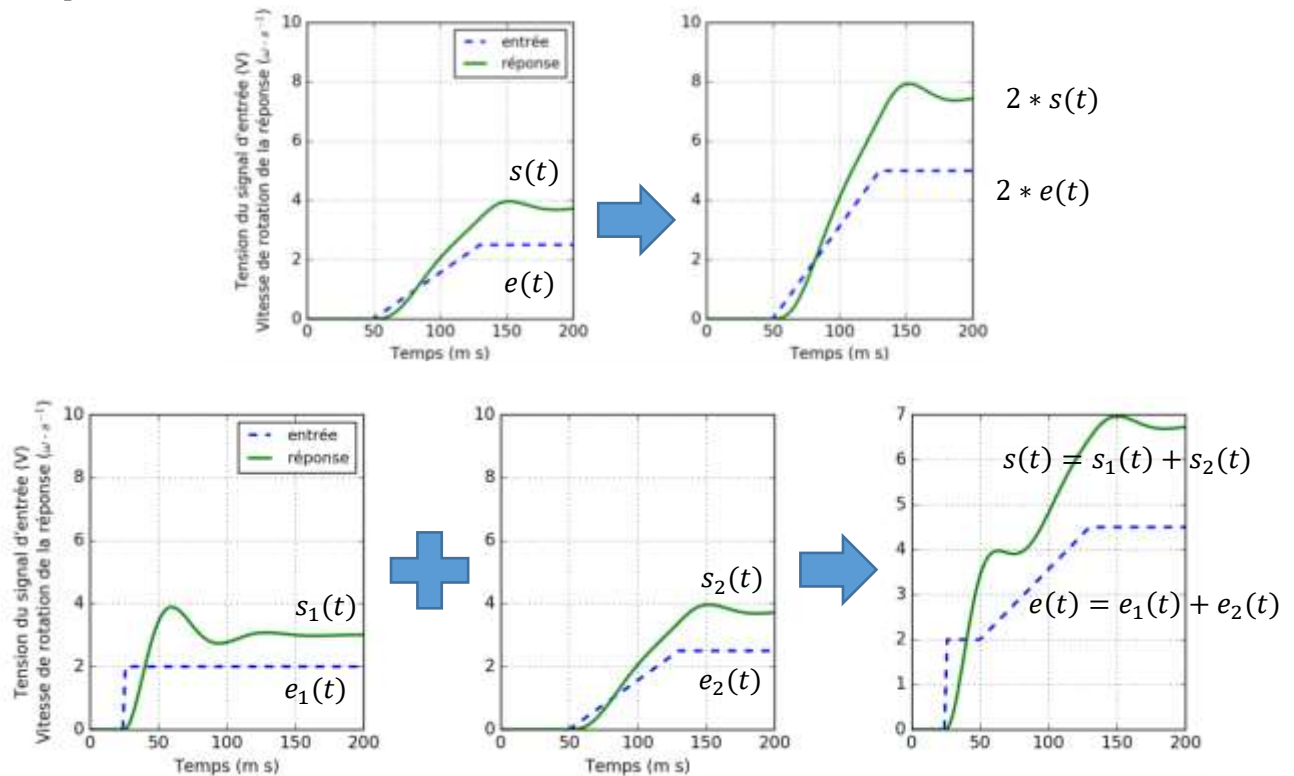
Pour prédire les performances d'un système, il faut d'abord en avoir un modèle.

2.1 Modéliser un SLCI par une fonction de transfert

Le modèle utilisé suppose le **Système Linéaire, Continu et Invariant : SLCI**.

Un système de type **SLCI**, vérifie les hypothèses suivantes :

- les grandeurs d'entrée et de sortie évoluent de manière **continue** avec le temps,
- le système est **invariant**, il reste identique et valable à chaque instant durant la période d'étude,
- le système est **linéaire**, c'est-à-dire que la sortie est une combinaison linéaire des réponses aux signaux d'entrée. Pour un signal d'entrée $e(t) = e_1(t) + k * e_2(t)$, la réponse est $s(t) = s_1(t) + k * s_2(t)$ (voir exemple ci-dessous).



Un SLCI est modélisé par **des équations différentielles linéaires à coefficients constants** de la forme :

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) \\
 = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 \cdot e(t)
 \end{aligned}$$

avec $e(t)$ l'entrée, $s(t)$ la sortie, n l'ordre du modèle (soit le degré de l'équation différentielle).

Pour des raisons liées à la causalité (le comportement d'un système dépend du passé, pas du futur), les systèmes réels étudiés imposent $m \leq n$.

Ce modèle mathématique a été déterminé par application de lois et principes de la **physique** : il est dit « **modèle de connaissance** », en opposition au « modèle de comportement » déterminé expérimentalement.

Transformée de Laplace, Intérêt :

Les équations différentielles d'un modèle de connaissance **ne permettent pas de caractériser le comportement du modèle uniquement par ses paramètres**, et indépendamment des grandeurs d'entrée et de sortie. **La transformée de Laplace donne une réponse à ce problème en transformant les équations différentielles en polynômes** afin de modéliser le système uniquement par ses paramètres.

Définition mathématiques (à ne pas savoir...) : Soit $f(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. On définit sa transformée de Laplace $L[f(t)]$ comme l'unique **fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :**

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) & \xrightarrow{L[f(t)]} & F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \\
 \text{Domaine temporel} & & \text{Domaine symbolique (ou de Laplace)}
 \end{array}$$

Propriétés de la transformée de Laplace :

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de déterminer facilement les transformées de Laplace des équations du modèle de connaissance.

	Linéarité		Produit de 2 fonctions	Dérivation	Intégration
$f(t)$	$K \cdot f(t)$	$K_1 \cdot g(t) + K_2 \cdot h(t)$	$f(t) \cdot g(t)$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$\int \int \int f(t) dt dt dt$ <i>n fois</i>
$F(p)$	$K \cdot F(p)$	$K_1 \cdot G(p) + K_2 \cdot H(p)$	$F(p) \cdot G(p)$	$p^n \cdot F(p)$	$\frac{F(p)}{p^n}$ avec CI nulles

Les **conditions initiales (CI) sont supposées nulles**. C'est-à-dire, que la fonction et ses dérivées sont nulles pour $t \leq 0 : f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0$.

On appelle ces conditions : **conditions de Heaviside**.

Exemple : Transformée de Laplace de l'équation différentielle suivante :

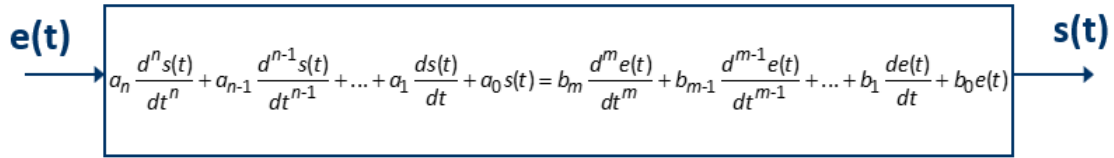
$$7 \frac{d^5 s(t)}{dt^5} + 4 \frac{d^3 s(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = 5 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + 3 \frac{de(t)}{dt} + 2 \cdot e(t)$$

Lorsque les CI sont nulles (conditions de Heaviside), on obtient avec la Transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}
 7p^5 S(p) + 4p^3 S(p) + 3p^2 S(p) &= 5p^2 E(p) + 3pE(p) + 2E(p) \\
 \Leftrightarrow (7p^5 + 4p^3 + 3p^2)S(p) &= (5p^2 + 3p + 2)E(p)
 \end{aligned}$$

Fonction de transfert (définie uniquement pour des CI nulles) :

Soit un SLCI dont le modèle de connaissance est donné sous forme d'une équation différentielle :



Système linéaire continu invariant (SLCI)

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle et **en considérant les conditions initiales nulles**, on a :

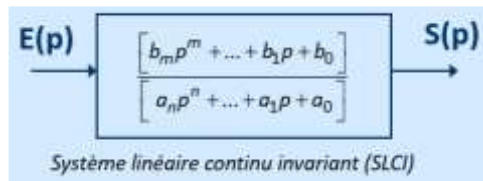
$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + \dots + a_1 \cdot p \cdot S(p) + a_0 \cdot S(p) = b_m \cdot p^m \cdot E(p) + \dots + b_1 \cdot p \cdot E(p) + b_0 \cdot E(p)$$

$$\Leftrightarrow (a_n \cdot p^n + \dots + a_1 \cdot p + a_0) S(p) = (b_m \cdot p^m + \dots + b_1 \cdot p + b_0) E(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{a_n \cdot p^n + \dots + a_1 \cdot p + a_0}$$

On appelle fonction de transfert la fraction $\frac{S(p)}{E(p)}$.

La **fonction de transfert** d'un système est donc **un modèle du système** dans le domaine de Laplace :



La fonction de transfert est **indépendante de l'entrée qui lui est appliquée. Elle ne dépend que** de la variable symbolique p et **des paramètres du modèle**. La fonction de transfert est une fraction de deux polynômes de variable en p . Si $H(p)$ est une fonction de transfert, alors $S(p) = H(p) \cdot E(p)$.

Forme canonique d'une fonction de transfert : gain statique, ordre et classe

Une fonction de transfert sous **forme canonique** est de la forme :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + \dots p + \dots + \dots p^m}{1 + \dots p + \dots + p^{n-\alpha}}$$

avec K le gain statique du modèle, α la classe du modèle (≥ 0) et n l'ordre du modèle.

Lorsque $\alpha = 1$, on dit que le modèle possède un intégrateur. Cela vient du fait que l'on peut écrire la fonction de transfert sous la forme $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{A(p)}{B(p)}$, $\frac{1}{p}$ étant la transformée de Laplace d'une intégrale.

Exemple : Forme canonique de $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2+3p+5p^2}{3p^2+4p^3+7p^5}$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{3p^2} \cdot \frac{1 + \frac{3p}{2} + \frac{5p^2}{2}}{1 + \frac{4p^3}{3p^2} + \frac{7p^5}{3p^2}} = \frac{2}{3p^2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{2}p + \frac{5}{2}p^2}{1 + \frac{4}{3}p + \frac{7}{3}p^3}$$

Gain statique : 2/3
 Classe : 2
 Ordre : 5

2.2 Prévoir le comportement en stabilité

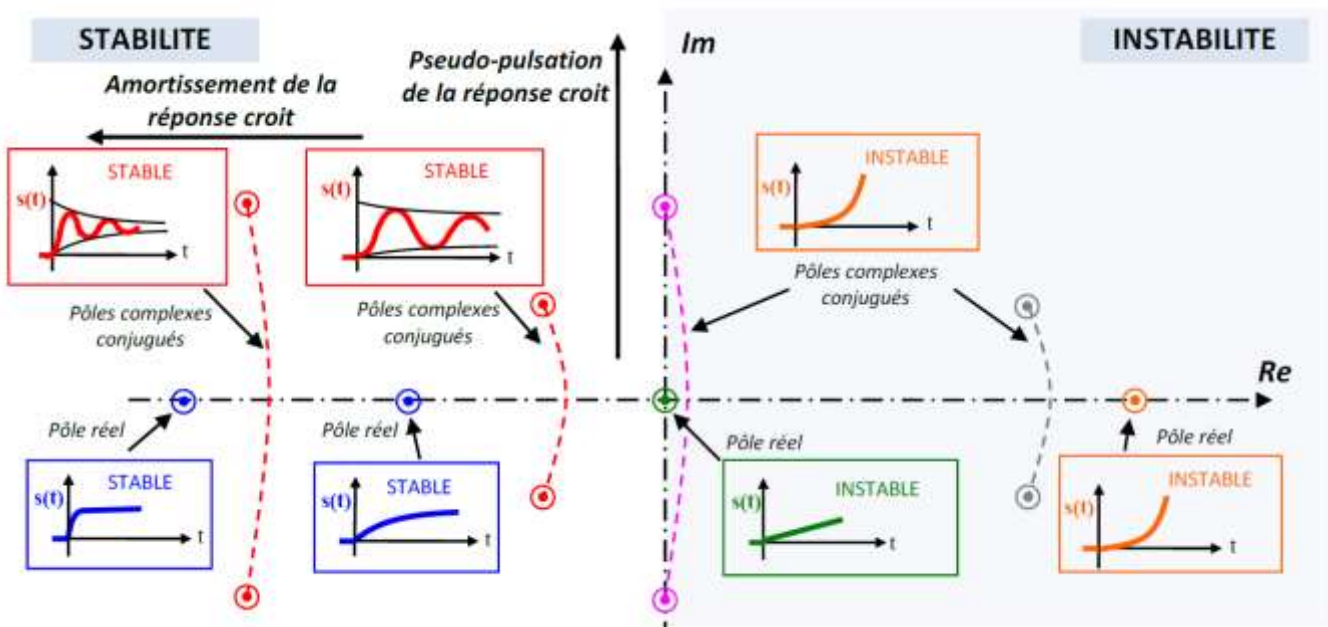
Cette performance doit être prédite en premier. Comme les autres performances, la stabilité est intrinsèque au modèle et elle est totalement indépendante du type d'entrée auquel il est soumis.

Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI : pôles à partie réelle strictement négative

On appelle **pôles**, les **racines du dénominateur** de la fonction de transfert. Un modèle peut donc alors posséder :

- des pôles réels $p = a$
- des pôles complexes conjugués : $p = c \pm j.d$

Pour mieux comprendre l'**influence des pôles** de la fonction de transfert d'un système, l'**allure de la réponse à une entrée en échelon** a été représentée selon la position de ces pôles **dans le plan complexe** (figure ci-dessous) :



Un système est donc **stable** (dans le sens entrée bornée/sortie bornée) **si** les **pôles** (racine du dénominateur) de sa fonction de transfert sont à **partie réelle strictement négative**.

Un pôle nul implique un modèle instable (selon la condition ci-dessus). Or un pôle nul implique aussi une classe ≥ 1 (selon la définition de la classe). **Ainsi, un modèle stable a nécessairement sa classe nulle**. Nécessaire ne signifie pas suffisant ! En effet, un **modèle de classe nulle n'est pas nécessairement stable...**

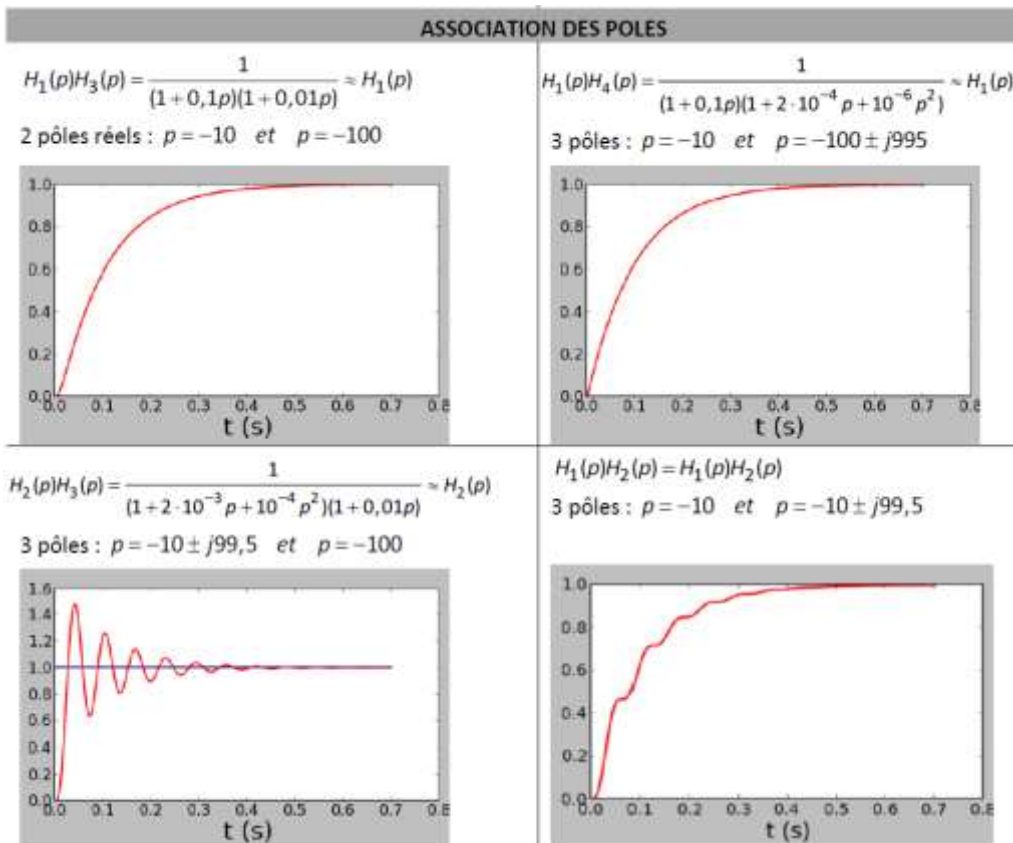
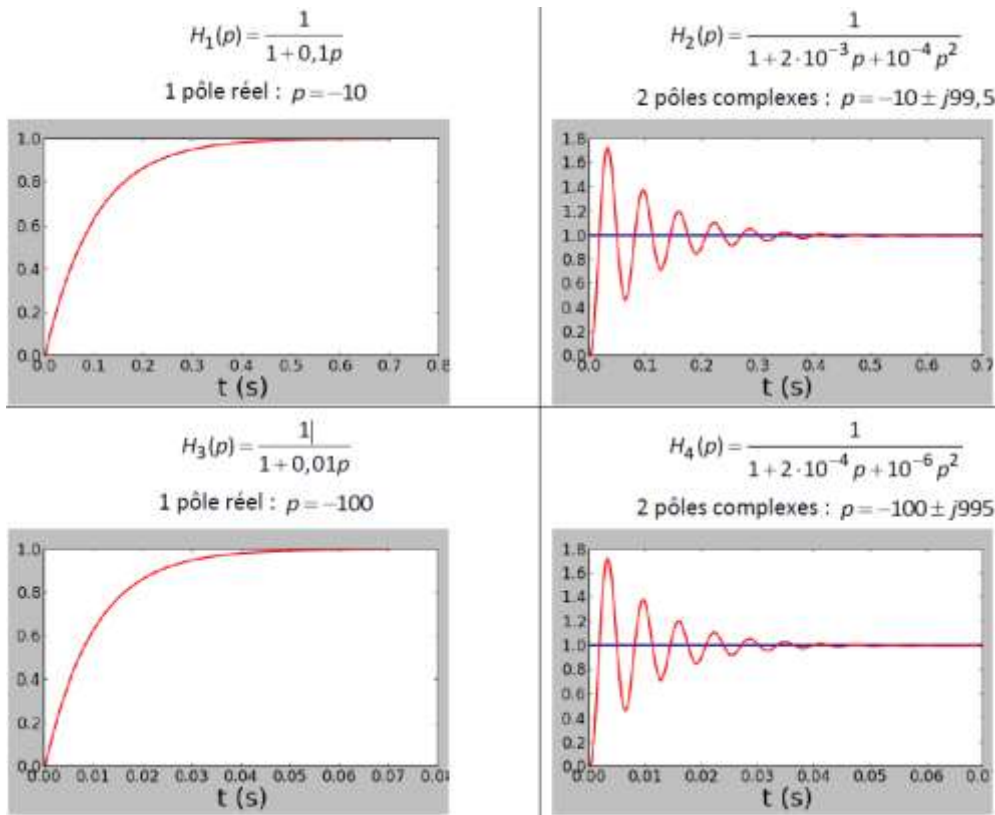
Autre observation : les **pôles réels ne génèrent pas d'oscillation** alors que les **pôles complexes conjugués font apparaître des oscillations**.

Ainsi, un modèle du 2^{ème} ordre stable, peut être :

- non oscillatoire s'il possède 2 pôles réels (discriminant $\Delta > 0$) ;
- oscillatoire s'il possède 2 pôles complexes conjugués (discriminant $\Delta < 0$).

Réduire l'ordre d'un modèle – Pôle dominant proche de l'axe des imaginaires

On donne l'allure de la réponse à une entrée en échelon d'amplitude 1, de différents modèles stables dont la partie réelle de leur pôle diffère d'un multiple de 10.



On remarque sur ces graphes, que le **régime transitoire des modèles ayant des pôles très éloignés de l'axe imaginaire est nettement plus court que celui des modèles ayant des pôles qui en sont plus proches.**

Aussi, **les pôles les plus proches de l'axe imaginaire sont qualifiés de pôles dominants.** Leur amortissement est plus faible.

S'ils sont suffisamment éloignés des pôles dominants, les pôles les plus éloignés de l'axe imaginaire peuvent être négligés, ce qui permet de diminuer l'ordre de la fonction de transfert modélisant le système (et donc la complexité de l'équation). On peut ainsi **prévoir les performances attendues d'un modèle en limitant la complexité des calculs**, notamment pour la performance de rapidité.

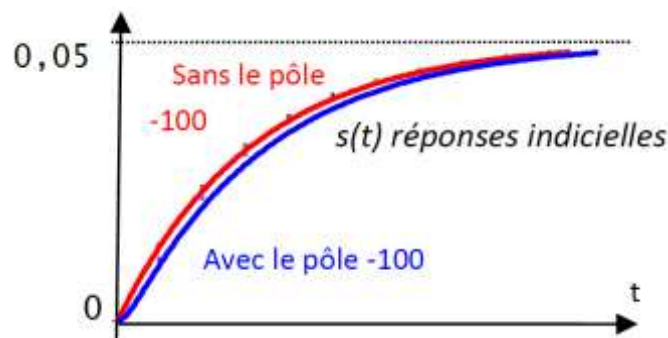
Dans la pratique, on a l'habitude, à condition d'être dans le cas favorable où **les pôles sont suffisamment éloignés les uns des autres** (facteur 10), de **conserver le(les) pôle(s) réel(s) et/ou la(les) paire(s) de pôles complexes conjugués les plus proches de l'axe imaginaire.** Attention, **le dénominateur doit être sous forme canonique avant d'effectuer la simplification !!**

Exemple : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{(p+1)(p+100)}$

Deux pôles : -1 et -100 (le modèle est donc stable)

Pôle dominant : -1 → réponse non oscillatoire

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{(p+1)(p+100)} = \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{(p+1)(0,01p+1)} \rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} \approx \frac{0,05}{p+1} \quad \text{Car le pôle -1 est dominant}$$



Polynôme caractéristique - Critère de Routh simplifié

Si la fonction de transfert d'un modèle est écrite sous la forme :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n} \quad \text{avec } D(p) \text{ qui est appelé polynôme caractéristique}$$

Alors, malheureusement **cette forme ne permet pas d'identifier immédiatement les pôles.** Il est alors possible d'utiliser le critère de Routh simplifié :

- **Pour qu'un modèle soit stable**, il est nécessaire que **tous les coefficients** a_i du polynôme caractéristique $D(p)$ soient tous **strictement de même signe** (nécessaire ne signifie pas suffisant).

- **Si tous les** a_i **sont strictement de même signe**, on ne peut pas affirmer que les pôles soient à partie réelle strictement négative. Dans le cas particulier des polynômes caractéristiques de degré 1 et de degré 2, **cette condition est suffisante pour assurer la stabilité.** Pour les polynômes caractéristiques de degré 3, **cette condition + la condition** $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$ **suffisent pour assurer la stabilité.**

Exemple : On considère trois systèmes ayant pour fonction de transfert respectives les fonctions :

$H_1(p) = \frac{1}{2 + 5p + 2p^2 + p^4}$	Ce modèle ne satisfait pas à la condition nécessaire de stabilité car le polynôme caractéristique ne possède pas de terme en p^3 . Ce modèle est donc instable.
$H_2(p) = \frac{1 + 3p}{4 + 3p - 2p^2 + 6p^3 + 8p^4}$	Ce modèle ne satisfait pas à la condition nécessaire de stabilité car le terme en p^2 du polynôme caractéristique est négatif. Ce modèle est donc instable.
$H_3(p) = \frac{1 + 2p^2}{8 + 10p + 4p^2 + 2p^3}$	Ce modèle satisfait bien la condition nécessaire de stabilité car les quatre coefficients du polynôme caractéristique sont tous strictement positifs. On ne peut alors pas conclure sur la stabilité. En rajoutant la condition $10 * 4 > 8 * 2$, on peut conclure que le modèle est stable.

Synthèse pour l'étude du comportement en stabilité

Polynôme caractéristique	Ordre 1	Ordre 2	Ordre supérieur à 2
Etape1 : étude de la stabilité (entrée bornée/sortie bornée)	Critère de Routh	Critère de Routh Ou calcul des pôles	Critère de Routh Ou calcul des pôles
Etape 2 : présence de dépassement	Aucun dépassement	Calcul de z et de ω_0 (présenté partie 3)	Etude des pôles dominants

2.3 Prévoir le comportement en rapidité

Les temps de réponse à 5% d'un modèle du 1er ordre ou d'un modèle du 2nd ordre seront pourra être déterminé analytiquement (voir partie 3). Pour les modèles d'ordre supérieur, il sera nécessaire de les rapprocher vers des modèles du 1^{er} et du 2nd ordre (voir notion de pôles dominants). Si ce n'est pas possible, seule une étude numérique permettra de déterminer le temps de réponse à 5%.

2.4 Prévoir le comportement en précision

Rappel sur la précision

- la notion d'erreur n'a de sens que si l'on compare des grandeurs consigne et sortie homogènes.
- la précision est caractérisée par l'erreur en régime permanent, appelée aussi erreur statique :

$$e_r(+\infty) = \Delta cons(+\infty) - \Delta s(+\infty) \text{ ou l'erreur statique relative } e_{r\%}(+\infty) = \left| \frac{e_r(+\infty)}{\Delta cons(+\infty)} \right|$$

Dans le domaine de Laplace, les conditions de Heaviside sont vérifiées. C'est-à-dire que les **conditions initiales sont nulles**. Ainsi l'erreur statique devient : $e_r(+\infty) = cons(+\infty) - s(+\infty)$

Détermination de l'erreur en régime permanent à l'aide du théorème de la valeur finale

Pour une fonction $f(t)$ **stable**, le **théorème de la valeur finale** permet de calculer sa valeur quand $t \rightarrow +\infty$ à partir de la transformée de Laplace :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot F(p)$$

NB : De manière très similaire, le théorème de la valeur initiale permet de calculer la valeur de $f(t)$ quand $t \rightarrow 0$ à partir de la transformée de Laplace : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$.

Ainsi, on a :

$$e_r(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (cons(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(Cons(p) - S(p))$$

La recherche de $e_r(+\infty)$ nécessite de connaître la transformée en Laplace des consignes $Cons(p)$ test :

Consigne	Impulsion	Echelon	Rampe
$cons(t)$	$\delta(t)$	E_0	$V_0 \cdot t$
$Cons(p)$	1	$\frac{E_0}{p}$	$\frac{V_0}{p^2}$

Cas particuliers des modèles stables non perturbés soumis à un échelon E_{cons0}

$$\frac{S(p)}{Cons(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + \dots p + \dots + p^m}{1 + \dots p + \dots + p^{n-\alpha}} \quad \text{avec la classe } \alpha = 0 \text{ (modèle stable)}$$

Pour un modèle non perturbé : $S(p) = H(p)Cons(p)$.

La consigne est un échelon d'amplitude E_{cons0} : $cons(t) = E_{cons0} \longrightarrow Cons(p) = \frac{E_{cons0}}{p}$

$$\begin{aligned} e_r(+\infty) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (cons(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(Cons(p) - S(p)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(Cons(p) - H(p)Cons(p)) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} p(1 - H(p)) Cons(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(1 - H(p)) \frac{E_{cons0}}{p} = \lim_{p \rightarrow 0^+} (1 - H(p)) E_{cons0} \end{aligned}$$

On en déduit l'erreur statique d'un **modèle stable non perturbé** soumis à une consigne échelon E_{cons0} :

$$e_r(+\infty) = (1 - K)E_{cons0} \quad \text{et} \quad e_{r\%}(+\infty) = |1 - K|$$

Remarque :

$$\begin{aligned} s(+\infty) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} S(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot H(p) \cdot Cons(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot H(p) \frac{E_{cons0}}{p} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} H(p) \cdot E_{cons0} \end{aligned}$$

La valeur finale d'un **modèle stable non perturbé** soumis à une consigne échelon E_{cons0} vaut :

$$s(+\infty) = K \cdot E_{cons0}$$

3. Réponses à un échelon des modèles usuels

3.1 Réponse des modèles proportionnel, dérivateur et intégrateur

Modèle proportionnel (ou gain pur) : K

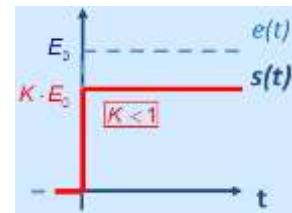
L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle à **action proportionnelle** sont :

$$s(t) = K \cdot e(t) \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = K$$

K : gain statique $\text{unité} = \frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un modèle à action **proportionnelle** est un **échelon d'amplitude $K \cdot E_0$** .

$$s(t) = K \cdot E_0 \text{ pour } t \geq 0$$



Modèle dérivateur : K.p

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle **dérivateur** sont :

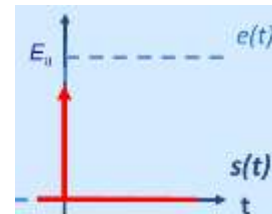
$$s(t) = K \cdot \frac{de(t)}{dt} \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = K \cdot p$$

K : gain statique, $\text{unité} = \frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}} s^{-1}$ car l'unité p est en s^{-1}

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un modèle **dérivateur** est l'**impulsion de Dirac $\delta(t)$** :

$$s(t) = \delta(t)$$

On retiendra $s(t) = 0$ pour $t > 0$



Modèle intégrateur : K/p

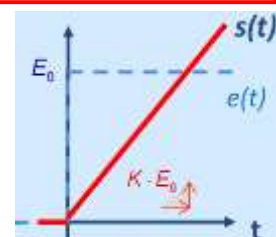
L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle **intégrateur** sont :

$$s(t) = K \cdot \int_0^t e(t) dt \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$

K : gain statique, $\text{unité} = \frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}} s$ car l'unité p est en s^{-1}

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un modèle **intégrateur** est **une rampe de pente $K \cdot E_0$** :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot t \text{ pour } t \geq 0$$



3.2 Réponse d'un modèle de 1^{er} ordre

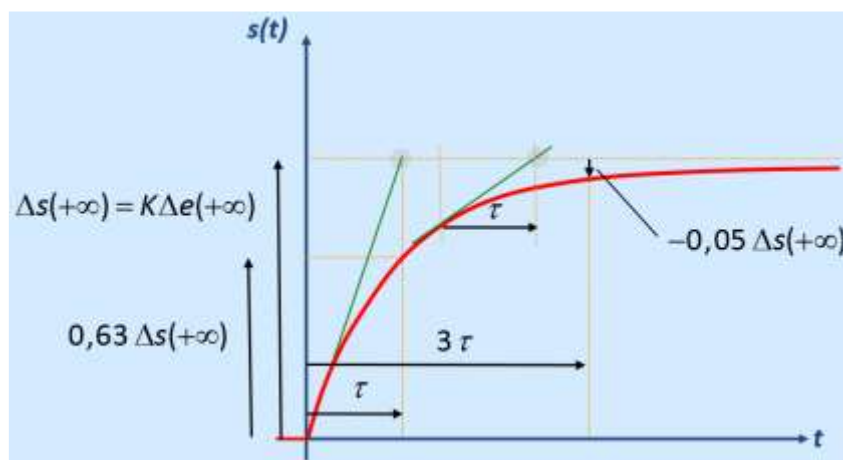
L'équation temporelle (équation différentielle du 1er degré) et la fonction de transfert d'un modèle **du premier ordre** sont :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

$$K : \text{gain statique,} \quad \text{unité} = \frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$$

τ : constante de temps (>0
et exprimé en secondes)

La solution de l'équation différentielle du premier degré est un résultat classique qui sera démontré en physique et mathématiques. On retiendra les résultats suivants :



Le **gain statique** K caractérise le comportement du modèle en **régime permanent** :

$$\Delta s(+\infty) = K \cdot \Delta e(+\infty)$$

La **constante de temps** τ caractérise le comportement du modèle en **régime transitoire** :

- durée pour atteindre 63% de la variation totale de la sortie = τ ;
- temps de réponse $t_{r5\%} = 3\tau$;

Remarque : la durée entre l'instant où une droite est tangente à la courbe, et l'instant où cette droite coupe l'asymptote horizontale vaut τ comme on peut le voir sur la courbe ci-dessus (notamment pour la tangente à l'instant initial).

Pour information, la solution de l'équation différentielle pour des conditions initiales nulles et une entrée en échelon d'amplitude E_0 est pour $t \geq 0$:

$$s(t) = K \cdot E_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

On retrouve quelques valeurs particulières :

- pour $t=0$, on retrouve bien $s(t) = 0$
- pour $t \rightarrow \infty$, on obtient la valeur finale $s(+\infty) = K \cdot E_0$

- pour $t = \tau$, $s(\tau) = K \cdot E_0(1 - e^{-1}) \approx 0,63 \cdot K \cdot E_0 \approx 0,63 \cdot s(\infty)$
- pour $t = 3\tau$, $s(3\tau) = K \cdot E_0(1 - e^{-3}) \approx 0,95 \cdot K \cdot E_0 \approx 0,95 \cdot s(\infty)$

3.3 Réponse d'un modèle de 2nd ordre

L'équation temporelle (équation différentielle du 2^{ème} degré) et la fonction de transfert d'un modèle **du deuxième ordre** sont :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \text{ pour } t \geq 0 \xrightarrow{L} \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \left(\frac{2z}{\omega_0}\right)p + \left(\frac{1}{\omega_0^2}\right)p^2}$$

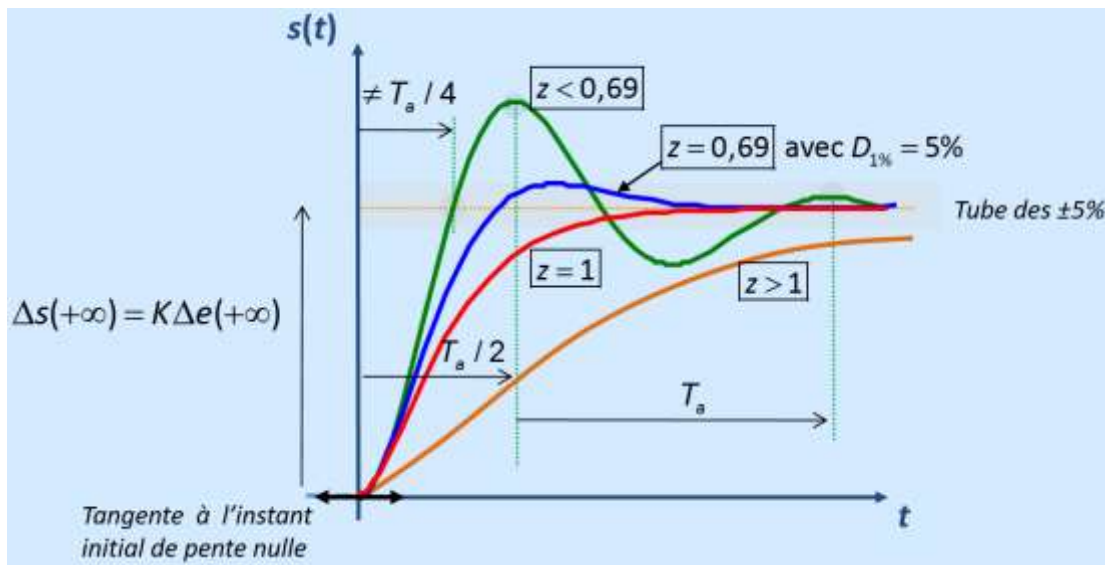
ω_0 : pulsation propre (>0 et exprimé en rad/s)
 z (noté parfois m ou ξ) : facteur d'amortissement (>0, sans unité)
 K : gain statique

$\text{unité} = \frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$

La réponse dépend des pôles de la fonction de transfert, c'est-à-dire des racines du polynôme caractéristique : $\omega_0^2 + 2 \cdot z \cdot \omega_0 \cdot p + p^2 = 0$

Avec $\Delta = (2 \cdot z \cdot \omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 (z^2 - 1)$

Ainsi, la réponse est différente suivant la valeur du facteur d'amortissement z (si $z > 1$ ou $z < 1$). On retiendra les résultats suivants, obtenus à partir de l'étude des équations temporelles de la sortie $s(t)$.



La **variation totale de la sortie** en régime permanent est $\Delta s(+\infty) = K \cdot \Delta e(+\infty)$

La **tangente à l'instant initial** a une **pente nulle**.

Remarque : dans le cas où $z \geq 1$, le dénominateur de $H(p)$ admet deux racines réelles ($\Delta \geq 0$). Il pourra alors être préférable d'écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) + (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

Dépassements

Le nombre et les valeurs des dépassements $D_{k\%}$ dépendent que de z :

- lorsque $z \geq 1$, il n'y pas de dépassement ;
- lorsque $0 < z < 1$, la valeur du dépassement relatif d'ordre k est donnée par l'abaque ci-dessous **et par la relation** :

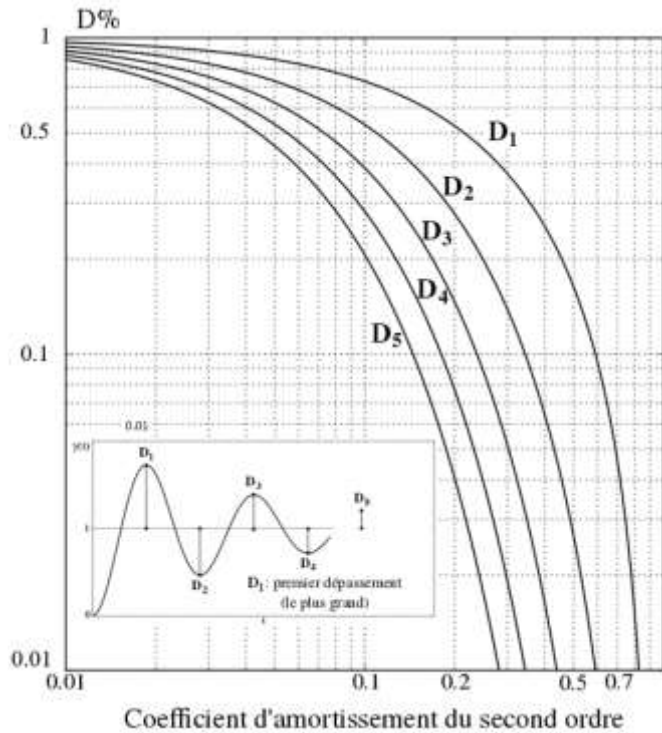
$$D_{k\%} = \left| \frac{\Delta s(t_k) - \Delta s(+\infty)}{\Delta s(+\infty)} \right| = e^{\frac{-z.k.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

- lorsque $z=0,69$, il existe **un seul dépassement visible à l'œil** ($>1\%$) qui vaut **5%** ;
- pour $0,9 < z < 1$, il existe des dépassements non visibles à l'œil (ils sont très inférieurs à 1%).

Ci-joint un abaque des dépassements relatifs pour la réponse à un échelon d'un modèle du 2ème ordre.

Exemple : Pour $z=0,3$ (on trouve cette valeur sur l'axe des abscisses), on observe qu'il y a 4 dépassements supérieurs à 1% (soit supérieurs à 0,01) :

- $D_{1\%} = 38\%$
- $D_{2\%} = 14\%$
- $D_{3\%} = 5\%$
- $D_{4\%} = 2\%$



Instants où ont lieu les dépassements : notion de pseudo-période

Lorsqu'il y a dépassement ($0 < z < 1$), ces derniers ont lieu **toutes les demi-périodes**. On définit alors la pseudo-période T_a et la pulsation amortie associée ω_a de la façon suivante :

$$\begin{cases} \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - z^2} \\ T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - z^2}} \end{cases}$$

Contrairement au dépassement, la **valeur de la pseudo-période T_a dépend de z et ω_0** (on rappelle $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$).

Attention : la durée entre l'instant d'un dépassement et l'instant d'un passage à la valeur $s(+\infty)$ n'est pas égale à $T_a/4$.

Temps de réponse ($t_{r5\%}$) et temps de réponse réduit ($t_{r5\%} \cdot \omega_0$)

Contrairement au dépassement, la **valeur temps de réponse à 5% dépend de z et ω_0** :

- lorsque $0 < z < 1$, $t_{r5\%}$ est grand car le modèle est peu amorti ;
- lorsque $z \gg 1$, $t_{r5\%}$ est grand car le modèle est très amorti ;
- lorsque **$z=0,69$** , $t_{r5\%}$ est **minimal**, un seul dépassement $>1\%$, $D_{1\%} = 5\%$
- lorsque $z=1$, il s'agit du modèle **sans dépassement le plus rapide**.

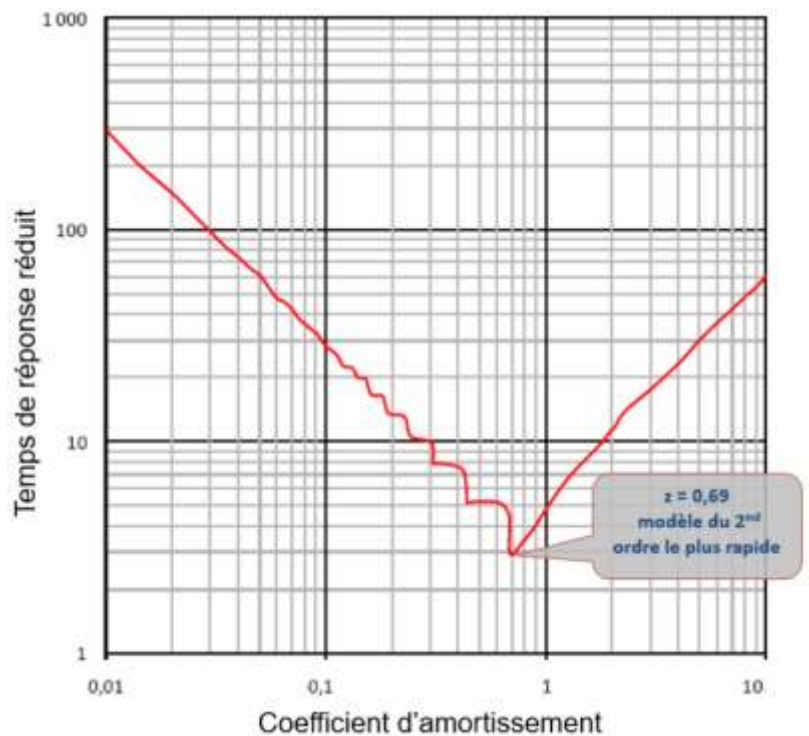
Il n'existe pas d'expression simple qui permet de calculer $t_{r5\%}$. On utilise l'abaque ci-dessous qui nous donne la valeur du **temps de réponse réduit**, défini par $t_{r5\%} \cdot \omega_0$ (sans unité) en fonction du facteur d'amortissement z . **Deux valeurs sont à connaître** :

- lorsque $z=0,69$, $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 3 \rightarrow t_{r5\%} = 3/\omega_0$;
- lorsque $z=1$, $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 5 \rightarrow t_{r5\%} = 5/\omega_0$

Temps de réponse réduit $t_{r5\%} \cdot \omega_0$ pour la réponse à un échelon d'un modèle du 2ème ordre :

À un facteur d'amortissement correspond un temps de réponse réduit.

Par conséquent, pour un même facteur z , plus ω_0 augmente, plus $t_{r5\%}$ diminue et donc plus le modèle est rapide.



Bilan

Le **gain statique K** caractérise le comportement du modèle en **régime permanent** :

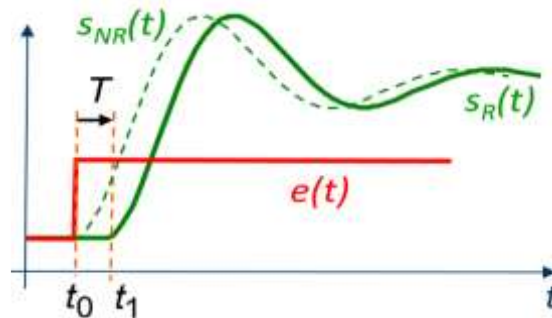
$$\Delta s(+\infty) = K \cdot \Delta e(+\infty)$$

Le **facteur d'amortissement z** et la **pulsation propre ω_0** caractérisent le comportement du modèle en **régime transitoire** :

- plus z est faible, plus les dépassements sont importants (voir abaque p 19);
- plus ω_0 est faible, plus la pseudo-période est grande (équation p 19 : $T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$)

3.4 Réponse d'un modèle à retard

La sortie **Retardée** $s_R(t)$ d'un modèle à **retard** donne une sortie avec la même allure que la sortie **Non Retardée** $s_{NR}(t)$ d'un modèle mais un décalage temporel (retard) d'un temps T :



L'équation temporelle et $H_R(p)$ la fonction de transfert d'un modèle à **retard** sont :

$$s_R(t) = s_{NR}(t - T) \text{ pour } t \geq T \quad \xrightarrow{L} \quad H_R(p) = \frac{S_R(p)}{S_{NR}(p)} = e^{-T.p}$$

T : retard (s)

Si $H_{NR}(p) = \frac{S_{NR}(p)}{E(p)}$ est la fonction de transfert d'un système non retardé (NR),

et $H_R(p) = \frac{S_R(p)}{S_{NR}(p)}$ est la fonction de transfert d'un modèle à retard :



alors $H(p) = \frac{S_R(p)}{E(p)}$ la fonction de transfert du système retardé vaut :

$$H(p) = \frac{S_R(p)}{E(p)} = H_{NR}(p) \cdot e^{-T.p}$$

Le retard pur peut modéliser des décalages temporels liés à des phénomènes de traitements numériques dans l'unité de commande ou des délais de transmission de l'information entre le capteur et l'unité de commande.

Il est rarement pris en compte en première approche et se voit ajouté au modèle uniquement lorsque ses effets s'avèrent non négligeables.

4. Identifier un modèle de comportement d'un système à partir de sa réponse expérimentale

Un **modèle de connaissance** est un modèle mathématique déterminé par application de lois et principes de la **physique**.

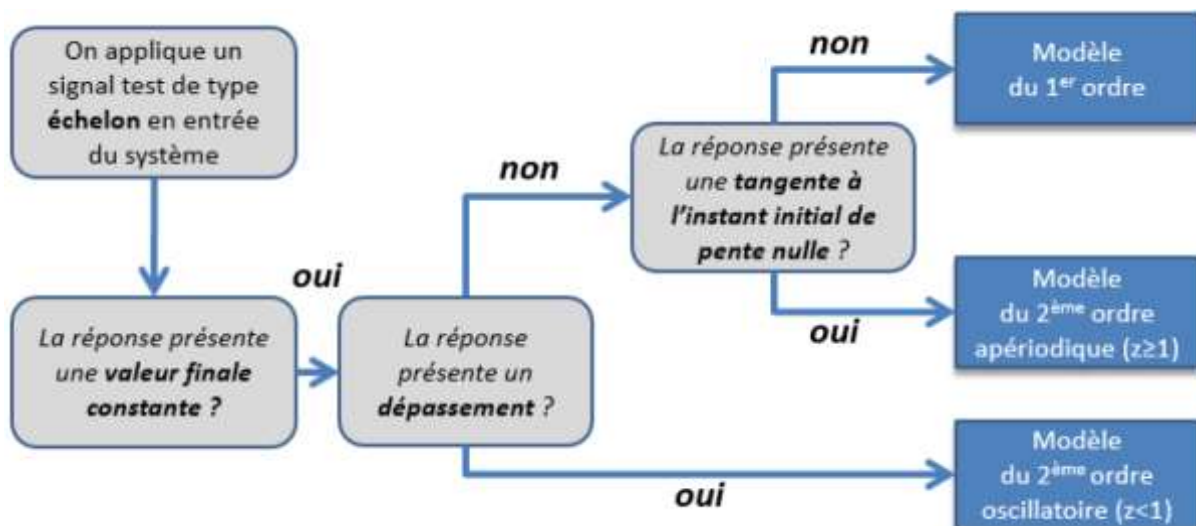
Un **modèle de comportement** est déterminé à partir de la réponse **expérimentale** à un signal test d'un système. Le modèle peut alors donner des courbes très proches de la réponse expérimentale sans qu'il soit physiquement bon.

4.1 Principe

Il est parfois nécessaire, ou utile, de modéliser le comportement d'un système à partir de **résultats expérimentaux**, sans passer par un modèle de connaissance. On utilise dans ce cas-là une **méthode d'identification**. Cela consiste à rechercher un modèle en analysant la réponse du système à une entrée test connue, de type échelon dans notre cas. Le principe d'identification est le suivant :

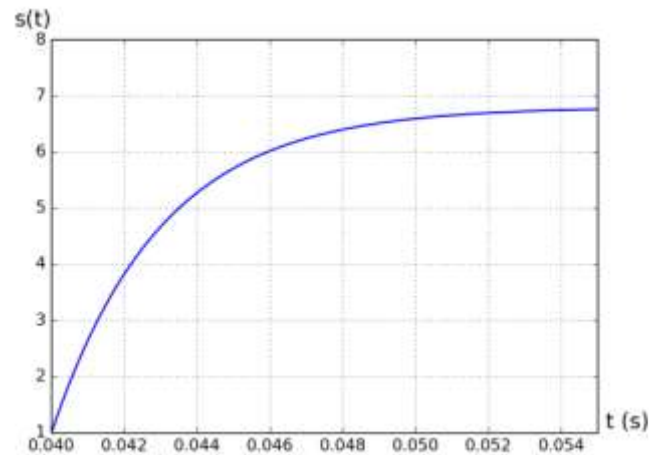
- Le système est considéré comme une « **boîte noire** ».
- On le soumet à un échelon et on compare les réponses obtenues expérimentalement à un catalogue de réponses types de façon à **choisir un modèle** de comportement (1er ordre, 2ème ordre...).
- On identifie les paramètres de sa fonction de transfert sur les relevés expérimentaux et on établit ainsi un **modèle de comportement** du système.

Cette démarche permet d'obtenir un modèle qu'il convient de valider en comparant des comportements prévus par simulation avec d'autres résultats expérimentaux. Cette étape de validation permet aussi d'estimer le domaine de validité du modèle. Au regard des caractéristiques des réponses temporelles à un échelon des modèles du 1er et du 2ème ordre présentés précédemment, la démarche d'identification est proposée ci-dessous :



4.2 Modéliser le comportement par un 1^{er} ordre (identification des paramètres K et τ)

Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude $\Delta e(+\infty) = 2$, obtenue expérimentalement, est donnée ci-contre.



La courbe expérimentale s'apparente à la réponse à un échelon d'un modèle du 1er ordre : **valeur finale constante, tangente à l'instant initial de pente non nulle, réponse sans dépassement.**

Cette simple observation permet, à priori, de proposer comme modèle de comportement du système, une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

Identifier le système revient alors dans ce cas à déterminer les valeurs du gain statique **K** et de la constante de temps **τ**. Les paramètres caractéristiques d'un modèle du premier ordre sont identifiés ainsi :

- **K** à partir du relevé de la **variation totale de la sortie** et en utilisant la relation $\Delta s(+\infty) = K \cdot \Delta e(+\infty)$ (attention aux conditions initiales) ;
- **τ** à partir du relevé de la **durée pour atteindre 63% de la variation totale de la sortie (et/ou 95%)**.

Exemple : à partir de la réponse expérimentale à un échelon d'amplitude 2, identifier les paramètres du modèle du système, modélisé par un premier ordre.

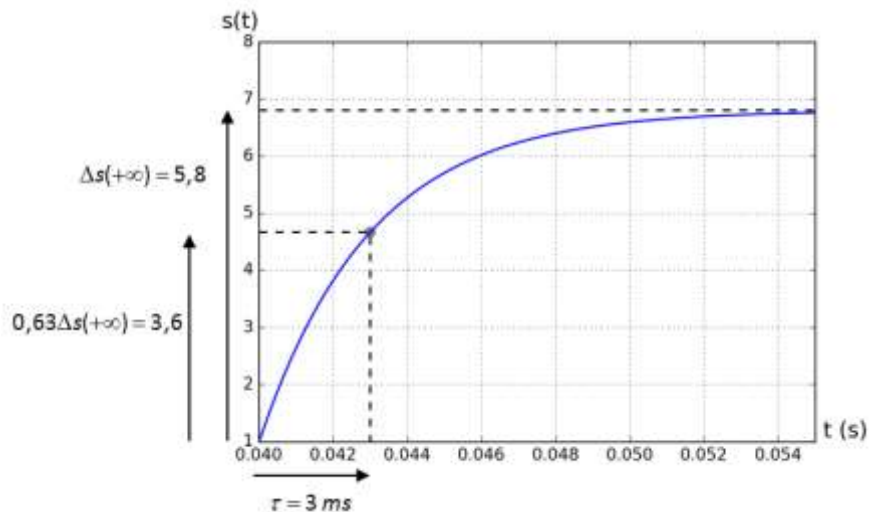
Identification de la valeur de K

On connaît la valeur de la variation totale de l'entrée $\Delta e(+\infty) = 2$

On relève la variation totale de la sortie $\Delta s(+\infty) = 5,8$, et on utilise $\Delta s(+\infty) = K \cdot \Delta e(+\infty)$, d'où $K=5,8/2=2,9$.

Identification de la valeur de τ

On relève la durée 3 ms pour atteindre 63% de la variation totale de la sortie
 $0,63 \cdot \Delta s(+\infty) = 0,63 \cdot 5,8 = 3,6$



Modélisation du comportement du système

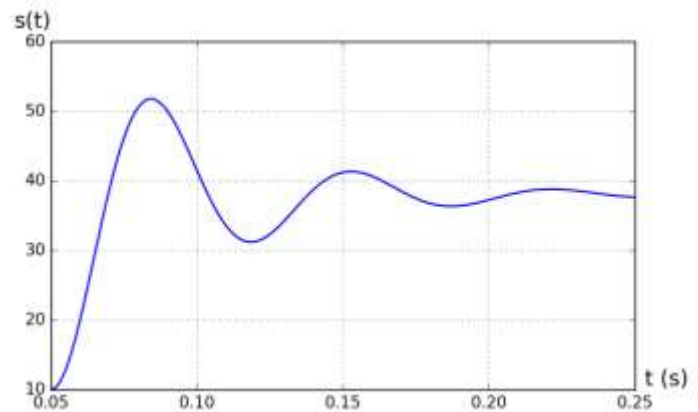
En injectant ces différentes valeurs dans la fonction de transfert du 1^{er} ordre, on obtient :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p} = \frac{2,9}{1 + 0,003.p}$$

4.3 Modéliser le comportement par un 2nd ordre oscillatoire (identification de K , z et ω_0)

Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude $\Delta e(+\infty) = 2$, obtenue expérimentalement, est donnée ci-contre.

La courbe expérimentale s'apparente à la réponse à un échelon d'un modèle du 2^{ème} ordre oscillatoire : **valeur finale constante, tangente à l'instant initial de pente nulle, réponse avec dépassements d'amplitudes décroissantes.**



Cette simple observation permet, à priori, de proposer comme modèle de comportement du système, une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \left(\frac{2z}{\omega_0}\right)p + \left(\frac{1}{\omega_0^2}\right)p^2}$$

Identifier le système revient alors dans ce cas à déterminer les valeurs du gain statique K , du facteur d'amortissement z et de la pulsation propre ω_0 . Dans le cas d'une **réponse à un échelon avec dépassement**, les caractéristiques du 2^{ème} ordre sont identifiées ainsi :

- K à partir du relevé de la **variation totale de la sortie** et en utilisant la relation $\Delta s(+\infty) = K \cdot \Delta e(+\infty)$ (attention aux conditions initiales) ;

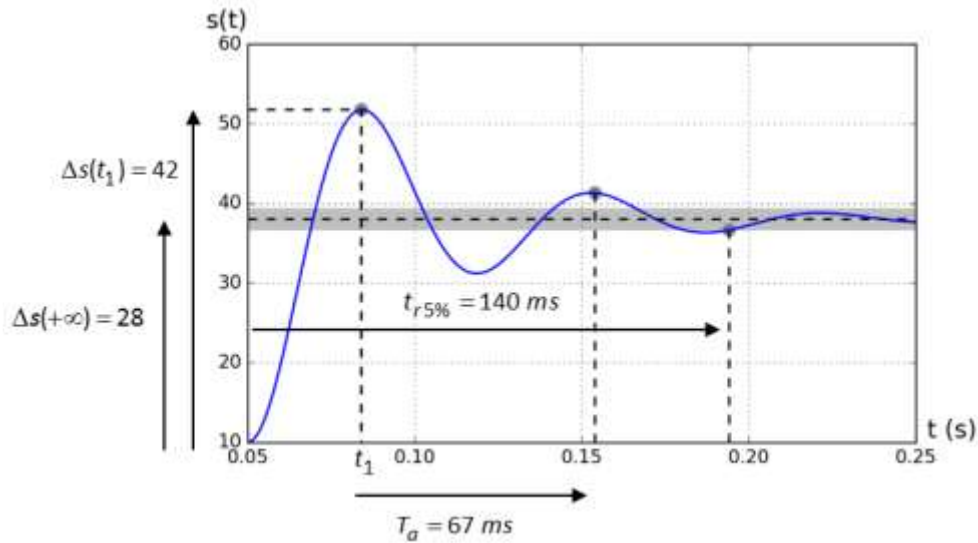
- z à partir du relevé de la valeur du **premier dépassement** $D_{1\%}$, en utilisant **l'abaque** qui lie le dépassement au facteur d'amortissement **ou** en utilisant la formule des **dépassements relatifs** :

$$D_{1\%} = e^{\frac{-z \cdot 1 \cdot \pi}{\sqrt{1-z^2}}} \Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{(\ln D_{1\%})^2}{\pi^2 + (\ln D_{1\%})^2}}$$

- ω_0 partir du relevé de la durée $t_{r5\%}$ et en utilisant **l'abaque** qui lie le temps de réponse réduit $t_{r5\%} \cdot \omega_0$ et le facteur d'amortissement (cette première méthode n'est pas très précise) **ou** à partir du relevé de la durée de la **pseudo période** T_a et en utilisant formule de la pseudo-période :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

Exemple : à partir de la réponse expérimentale à un échelon d'amplitude 2, identifier les paramètres du modèle du système, modélisé par un deuxième ordre oscillant.



Identification de la valeur de K

On connaît la valeur de la variation totale de l'entrée $\Delta e(+\infty) = 2$

On relève la variation totale de la sortie $\Delta s(+\infty) = 38 - 10 = 28$

On utilise $\Delta s(+\infty) = K \cdot \Delta e(+\infty)$, d'où $K=28/2=14$.

Identification de la valeur de z

On relève la valeur du 1er dépassement absolu $D_1 = 42 - 28 = 14$, donnant $D_{1\%} = \left| \frac{D_1}{\Delta s(+\infty)} \right| = \frac{14}{28} = 0,5$

On utilise l'abaque qui lie les dépassements relatifs au facteur d'amortissement : $z \approx 0,21$

Ou on utilise la formule des dépassements relatifs : $z = \sqrt{\frac{(\ln D_{1\%})^2}{\pi^2 + (\ln D_{1\%})^2}} = \sqrt{\frac{(\ln 0,37)^2}{\pi^2 + (\ln 0,37)^2}} = 0,21$

Identification de la valeur de ω_0

On relève le temps de réponse $t_{r5\%} \approx 140 \text{ ms}$. On utilise ensuite l'abaque qui lie le temps de réponse réduit $t_{r5\%} \cdot \omega_0$ et le facteur d'amortissement :

pour $z=0,21$ on relève $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 13 \rightarrow \omega_0 \approx \frac{13}{0,140} = 93 \text{ rad/s}$

Ou on relève $T_a \approx 0,067 \text{ s}$, on utilise ensuite la formule :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}} \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_a \sqrt{1-z^2}} = \frac{2\pi}{0,067 \sqrt{1-0,3^2}} = 95 \text{ rad/s}$$

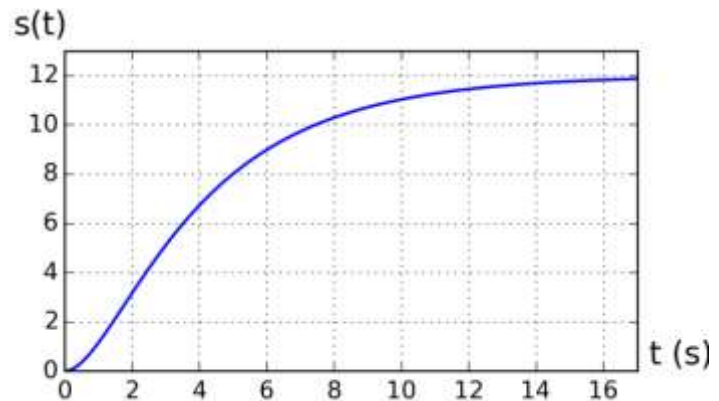
Modélisation du comportement du système

En injectant ces différentes valeurs dans la fonction de transfert du 2nd ordre, on obtient :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \left(\frac{2z}{\omega_0}\right)p + \left(\frac{1}{\omega_0^2}\right)p^2} = \frac{14}{1 + \left(\frac{2 \cdot 0,21}{95}\right)p + \left(\frac{1}{95^2}\right)p^2}$$

4.4 Modéliser le comportement par un 2nd ordre apériodique (identification de K , z et ω_0)

Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude $\Delta e(+\infty) = 2$, obtenue expérimentalement, est donnée ci-contre.



La courbe expérimentale s'apparente à la réponse à un échelon d'un modèle du 2^{ème} ordre apériodique : **valeur finale constante, tangente à l'instant initial de pente nulle, réponse sans dépassement.**

Cette simple observation permet, à priori, de proposer comme modèle de comportement du système, une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \left(\frac{2z}{\omega_0}\right)p + \left(\frac{1}{\omega_0^2}\right)p^2}$$

Vu que $z \geq 1$, le dénominateur de $H(p)$ admet deux racines réelles ($\Delta \geq 0$). Il est alors préférable d'écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) + (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

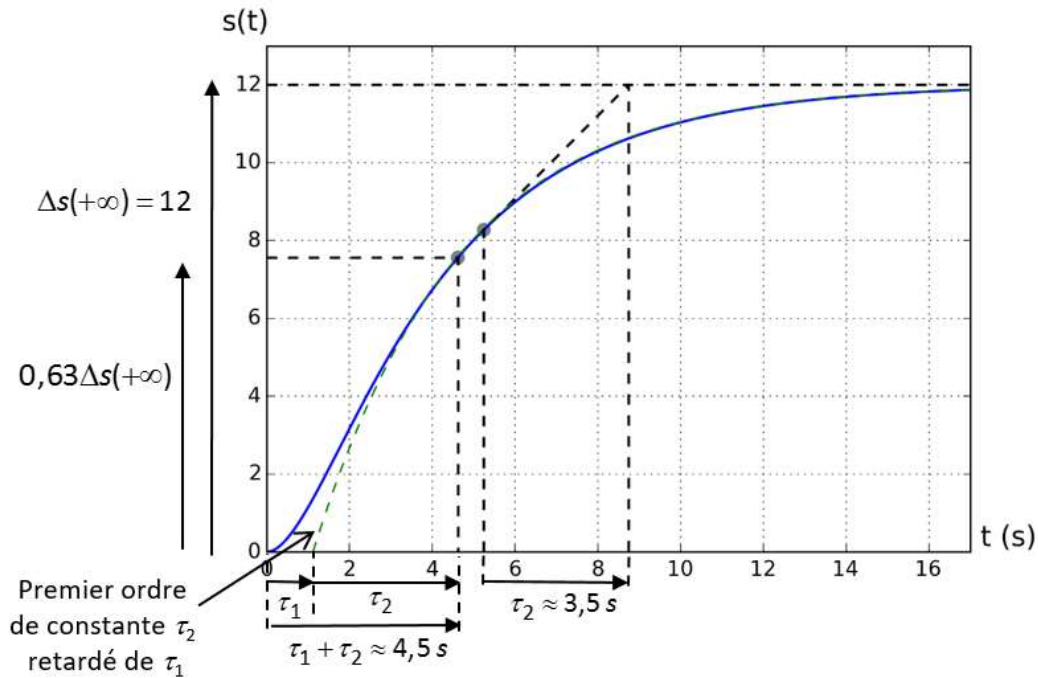
Identifier le système revient alors dans ce cas à déterminer les valeurs du gain statique K , et des deux constantes de temps τ_1 et τ_2 . Dans le cas d'une **réponse à un échelon sans dépassement**, mais avec **pente nulle à l'instant initial**, les caractéristiques du 2^{ème} ordre sont identifiées en supposant que pour t suffisamment grand, la courbe est assimilable à la réponse d'un **premier ordre de constante de temps τ_2 , avec un retard τ_1** . Les caractéristiques sont déterminées ainsi :

- K à partir du relevé de la **variation totale de la sortie** et en utilisant la relation $\Delta s(+\infty) = K \cdot \Delta e(+\infty)$ (attention aux conditions initiales) ;

- τ_2 à partir du relevé de la **durée entre l'instant où une droite est tangente à la courbe, et l'instant où cette droite coupe l'asymptote horizontale** ;

- τ_1 à partir du relevé de la **durée $\tau_1 + \tau_2$ pour atteindre 63% de la variation totale de la sortie.**

Exemple : à partir de la réponse expérimentale à un échelon d'amplitude 2, identifier les paramètres du modèle d'un système, modélisé par un deuxième ordre apériodique.



On suppose que pour t suffisamment grand ($>4,5$ s ici), la réponse correspond à celle d'un modèle du premier ordre de constante de temps τ_2 retardée de τ_1 .

Identification de la valeur de K

On connaît la valeur de la variation totale de l'entrée $\Delta e(+\infty) = 2$. On relève la valeur de la variation totale de la sortie $\Delta s(+\infty) = 12$, et on utilise $\Delta s(+\infty) = K \cdot \Delta e(+\infty)$, d'où $K=12/2=6$

Identification de la valeur des constantes de temps

À partir d'un point de la courbe suffisamment éloigné du point d'inflexion (ici $t=5$ s valeur prise arbitrairement, mais suffisamment grande), et après avoir tracé la tangente en ce point et son intersection avec l'asymptote horizontale, on relève sur la courbe : $\tau_2 \approx 8,5 - 5 \approx 3,5$ s

On relève l'instant $t_{63\%} \approx 4,5$ s correspondant à une réponse de 63% de la variation totale de la sortie. On en déduit $\tau_1 + \tau_2 = t_{63\%}$ soit $\tau_1 = t_{63\%} - \tau_2 \approx 4,5 - 3,5 \approx 1$ s

Modélisation du comportement du système

En injectant ces différentes valeurs dans la fonction de transfert du 2nd ordre, on obtient :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) + (1 + \tau_2 \cdot p)} = \frac{6}{(1 + p) + (1 + 3,5 \cdot p)}$$

5. Déterminer le modèle de connaissance d'un SLCI asservi non perturbé

Dans les parties précédentes, nous avons vu que la forme et certains paramètres caractéristiques de la fonction de transfert d'un système permettait de prévoir les performances ainsi que l'allure temporelle de la grandeur de sortie d'un système lorsqu'il est soumis à une entrée en échelon

Dans cette partie, nous allons apprendre à déterminer la fonction de transfert globale d'un système, à partir du modèle de connaissance de chacun de ses constituants (préactionneur, actionneur, capteur...) et en tenant compte de la façon dont ces constituants sont organisés.

On s'intéressera plus particulièrement aux systèmes asservis qui, équipés de capteurs permettant en permanence le contrôle de la grandeur de sortie, sont capables de réagir de façon autonome à des perturbations extérieures.



5.1 Système asservi :

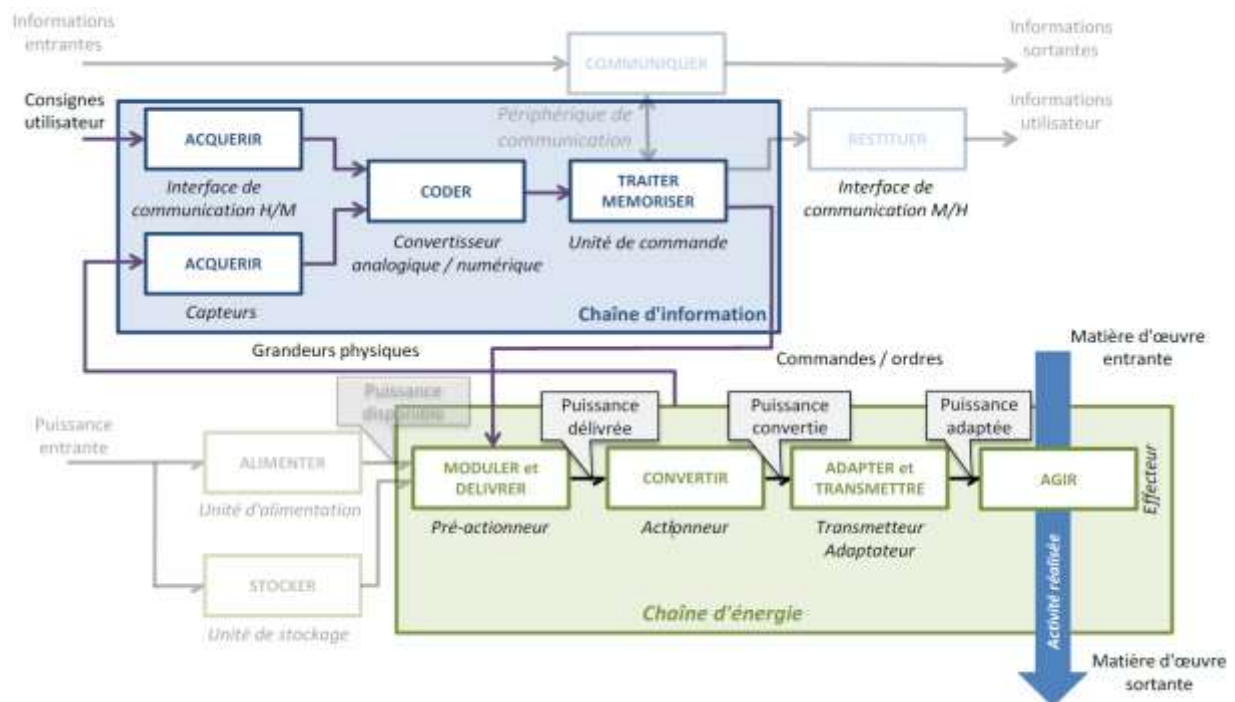
Définition

Une **grandeur de sortie** d'une activité d'un système est **asservie** si :

- les grandeurs de **consigne** et de **sortie** sont de **même nature** ;
- la grandeur de **sortie** est **mesurée par un capteur, puis comparée** à la **consigne** ;
- une **correction** est apportée afin d'**améliorer les performances** de stabilité, de rapidité et de précision.

On parle alors d'un « système asservi » mais c'est un abus de langage, c'est la grandeur de sortie de l'activité étudiée, qui est asservie à la grandeur de consigne.

Constituants d'une chaîne fonctionnelle impactant les performances d'un système asservi



Dans la description par chaîne fonctionnelle, **les fonctions communiquer, restituer, alimenter et stocker de l'énergie n'interviennent pas directement sur les performances d'un système**. Le modèle d'un système asservi s'appuiera sur les éléments visible ci-dessus. Dans cette représentation :

- la **grandeur d'entrée** est la consigne ;
- la **grandeur de sortie**, la **réponse**, est la matière d'œuvre (effort, position, vitesse) ou une grandeur intermédiaire liée à celle-ci.

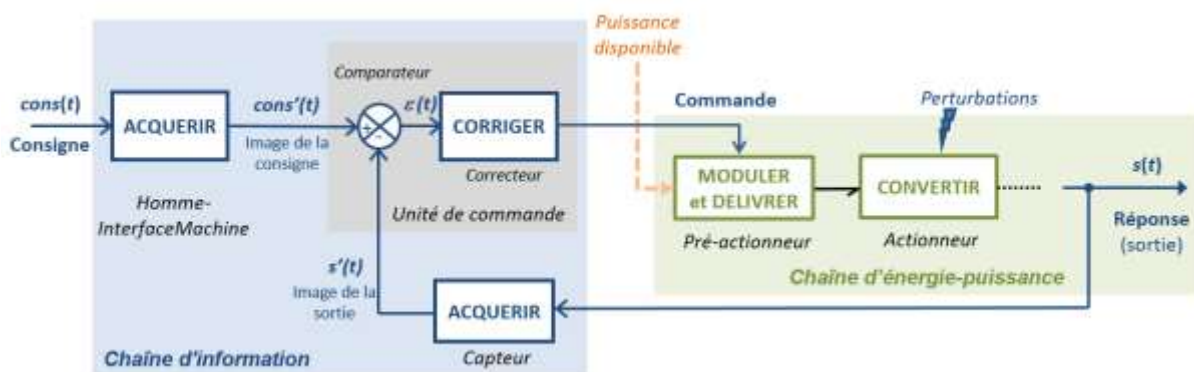
5.2 Utilisation de schémas-blocs

Structure d'un schéma-bloc d'une grandeur asservie : comparateur, image de l'erreur et correcteur

Il existe un outil graphique, nommé schéma-bloc, qui permet de faire apparaître clairement :

- le modèle de connaissance de chacun des constituants d'une activité d'un système ;
- la façon dont ces constituants sont agencés entre eux.

Le **schéma bloc** est construit à partir de la **chaîne fonctionnelle** en ne conservant que les constituants intervenant **directement dans l'asservissement** et en choisissant **les grandeurs contrôlées** (flux ou effort). On supposera les conditions d'Heaviside vérifiées (conditions initiales nulles).



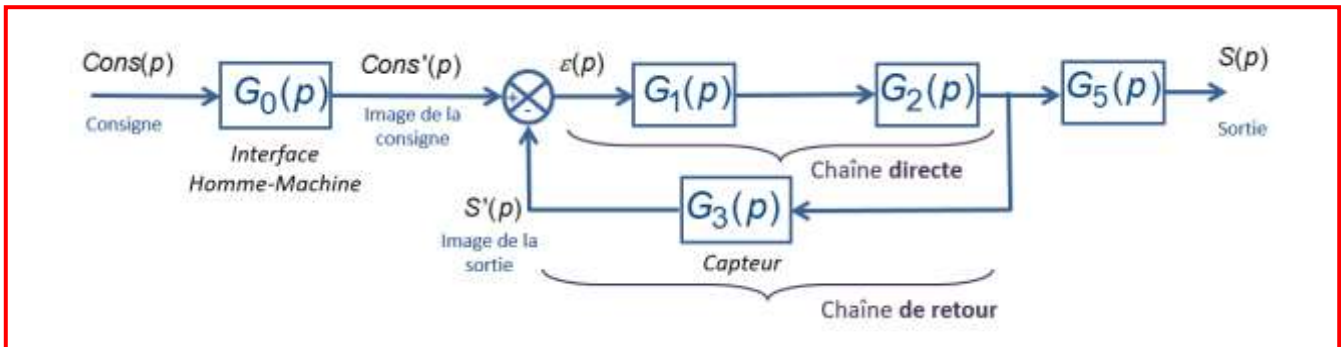
Les éléments suivants sont indispensables au bon fonctionnement d'un système asservi :

CONSTITUANT	FONCTION
Interface H/M	Traduire la consigne en un signal utilisable par l'unité de commande
Capteur	Mesurer et traduire la sortie en un signal utilisable par l'unité de commande
Comparateur	Comparer l'image de la sortie et l'image de la consigne . Il délivre un signal $\varepsilon(t)$, en général électrique, qui est une image de l'erreur $e_r(t)$, avec : $\varepsilon(t) = cons'(t) - s'(t)$ et $e_r(t) = cons(t) - s(t)$
Correcteur	Corriger l'image de l'erreur afin de délivrer un signal de commande pour améliorer les performances du système (stabilité – rapidité – précision)



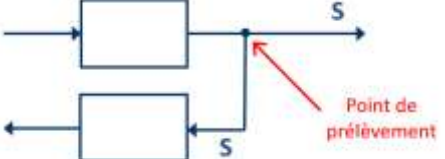
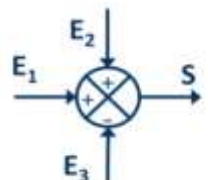
Sur le schéma ci-dessus, on remarque que l'entrée du pré-actionneur (utilisé pour asservir la grandeur de sortie) est la commande issue de l'unité de commande et non pas la puissance disponible (en pointillé sur le schéma). Il ne s'agit pas pour autant de penser que c'est la grandeur de commande, en général une tension (en V) de faible niveau, qui fournit la puissance nécessaire à la chaîne d'énergie-puissance pour faire évoluer la grandeur de sortie.

Schéma-bloc d'une grandeur asservie non perturbée : chaîne directe et chaîne de retour

Dans le but de pouvoir déterminer plus facilement la fonction de transfert globale d'une activité d'un système, la représentation schéma-bloc met en évidence le modèle de chacun des constituants intervenant dans l'asservissement. Dans le cas général, la représentation d'un asservissement par schéma-bloc est la suivante :



Les trois éléments de base du schéma-bloc sont :

<p>Le bloc qui représente un constituant du système asservi (interface H/M, capteur, actionneur, ...) ou une équation mathématique liant deux grandeurs. Ce bloc comporte une seule entrée et une seule sortie.</p>	 <p>Ex : un moteur électrique peut être vu comme un bloc avec une tension de commande en entrée et une vitesse de rotation en sortie.</p> 
<p>Le point de prélèvement qui prélève, sans le modifier, le signal en un point.</p>	
<p>Le comparateur (soustracteur ou sommateur) qui comporte plusieurs entrées mais une seule sortie. Ces entrées peuvent être additionnées ou soustraites.</p>	 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $S = E_1 + E_2 - E_3$ </div>

Un système asservi est constitué de deux chaînes :

- la **chaîne directe**, entre le comparateur et le point de prélèvement du capteur, qui assure les fonctions de commande et de puissance ;
- la **chaîne de retour**, entre le point de prélèvement du capteur et le comparateur, qui assure la fonction de mesure du signal de sortie.

La mesure de la réponse (point de prélèvement entre $G_2(p)$ et $G_5(p)$) est souvent réalisée au travers d'une grandeur intermédiaire et non pas directement sur $S(p)$.

Exemple : Sur le robot Ericc du laboratoire, la position angulaire d'un bras est déterminée à l'aide de la position angulaire mesurée sur l'axe du moteur (qui est une image de la position angulaire du bras). En effet, cette position mesurée est directement proportionnelle, par l'intermédiaire du rapport de transmission du réducteur, à la position du bras qui est la grandeur asservie.

Relation entre les fonctions de transfert de l'interface homme-machine et du capteur

Selon le schéma-bloc général d'un système asservi (page précédente) :

$$\varepsilon(p) = Cons'(p) - S'(p) \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon(p) = G_0(p).Cons(p) - \frac{G_3(p)}{G_5(p)}S(p)$$


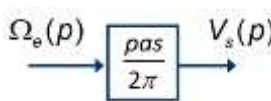
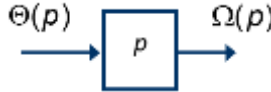
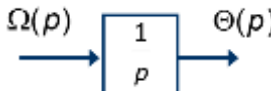

Pour que l'image de l'erreur $\varepsilon(p)$ soit nulle lorsque l'erreur est nulle, il est impératif que **les images de la consigne et de la sortie soient proportionnelles**, respectivement à la consigne et à la sortie, avec le **même coefficient de proportionnalité** :

$$G_0(p) = \frac{G_3(p)}{G_5(p)}$$

$$\text{et } \varepsilon(p) = G_0(p)E_r(p)$$

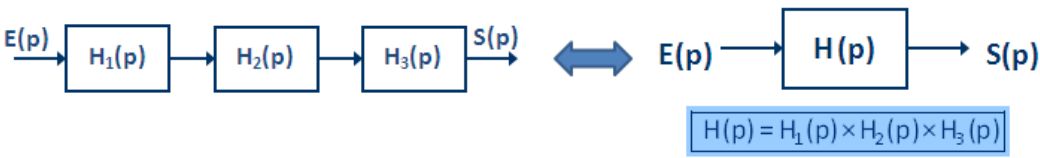
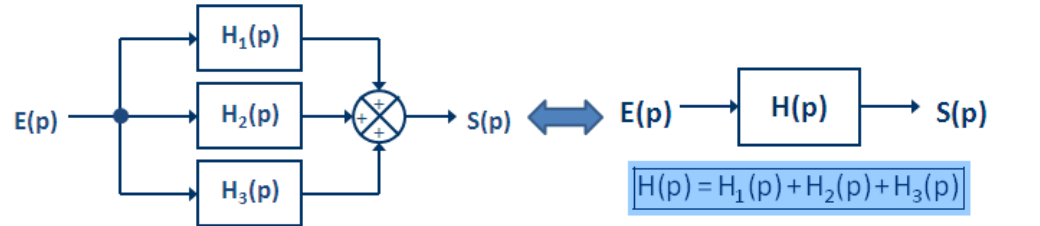
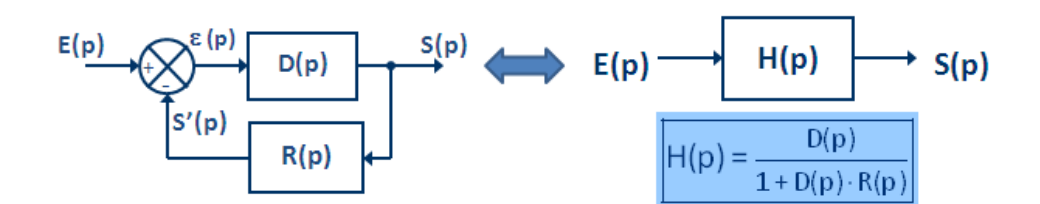
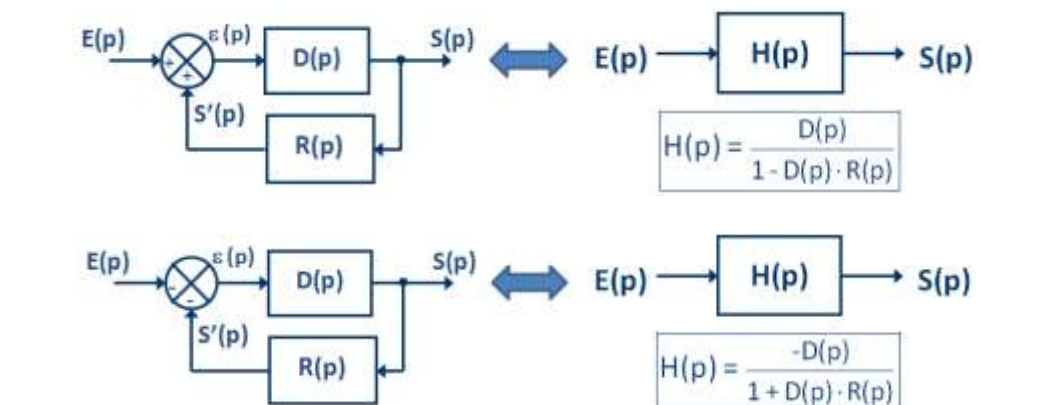
Modèle de connaissance liant deux grandeurs (une entrée et une sortie)

Chaque équation est représentée par un bloc qui contient sa fonction de transfert.

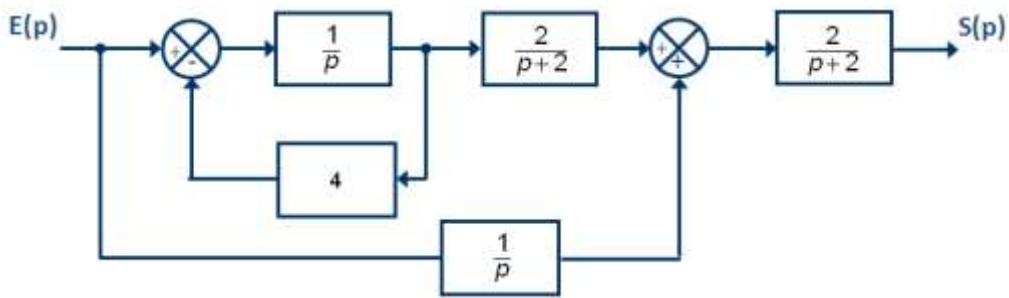
Exemple d'équation à modéliser	Équation temporelle	Transformée en Laplace	Schéma-bloc
Loi entrée-sortie cinématique d'un réducteur	$\omega_s(t) = R. \omega_e(t)$	$\Omega_s(tp) = R. \Omega_e(p)$	
Loi entrée-sortie cinématique d'un transmetteur vis-écrou	$v_s(t) = \frac{pas}{2\pi} \omega_e(t)$	$V_s(p) = \frac{pas}{2\pi} \Omega_e(p)$	
Loi entre vitesse et position	$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$\Omega(p) = p. \theta(p)$	
	$\theta(t) = \int \omega(t)dt$	$\theta(p) = \frac{\Omega(p)}{p}$	
Loi de changement d'unité entre radian et degré	$\theta_{deg}(t) = \frac{360}{2\pi} \theta_{rad}(t)$	$\theta_{deg}(p) = \frac{360}{2\pi} \theta_{rad}(p)$	

5.3 Du schéma-bloc à la fonction de transfert globale d'un système asservi

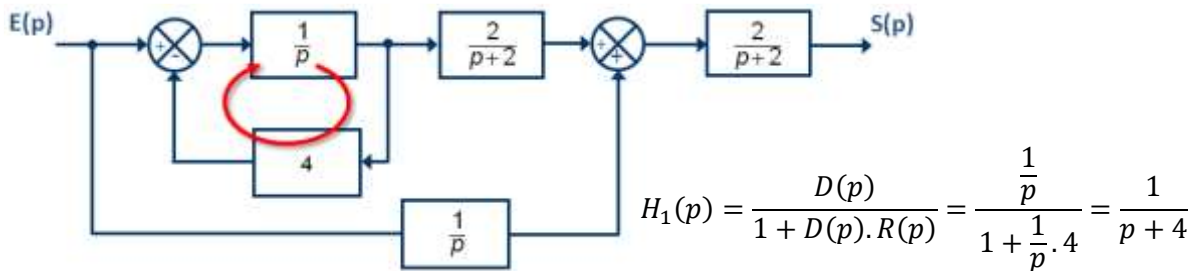
Pour étudier ou prévoir le comportement d'un SLCI asservi, il est nécessaire de connaître sa fonction de transfert globale. Celle-ci est obtenue à partir des différentes fonctions de transfert de chacun de ses constituants. Il est donc indispensable de connaître les règles d'association et de simplification des schémas-blocs.

<p>Blocs en série</p>	 <p>La fonction de transfert équivalente de blocs en série est égale au produit des fonctions de transfert de chacun des blocs.</p>
<p>Blocs en parallèle</p>	 <p>La fonction de transfert équivalente de blocs en parallèle est égale à la somme des fonctions de transfert de chacun des blocs.</p>
<p>Blocs en boucle fermée : FTBF</p>	 <p>$D(p)$: FT de la chaîne directe $R(p)$: FT de la chaîne de retour</p> <p><u>Démonstration</u> : $S(p) = D(p) \cdot \varepsilon(p) = D(p)(E(p) - S'(p)) = D(p)(E(p) - R(p) \cdot S(p))$</p> <p>D'où $S(p)(1 + D(p) \cdot R(p)) = D(p) \cdot E(p)$ et finalement $S(p) = \frac{D(p)}{1 + D(p) \cdot R(p)} E(p)$</p> <p><u>Remarque</u> : Attention aux signes dans le comparateur :</p> 

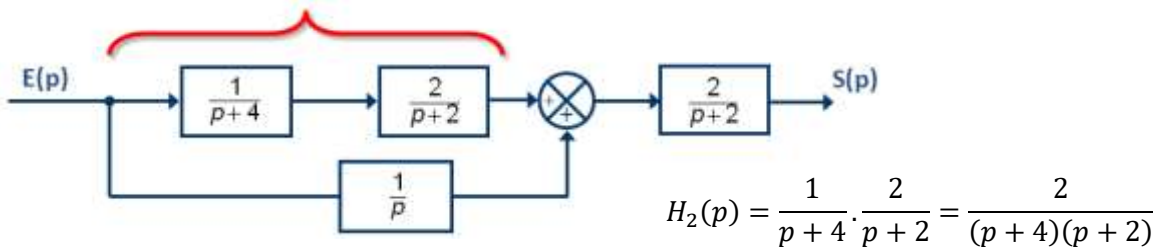
Exemple : déterminer la fonction de transfert d'un système représentée par le schéma-bloc ci-dessous :



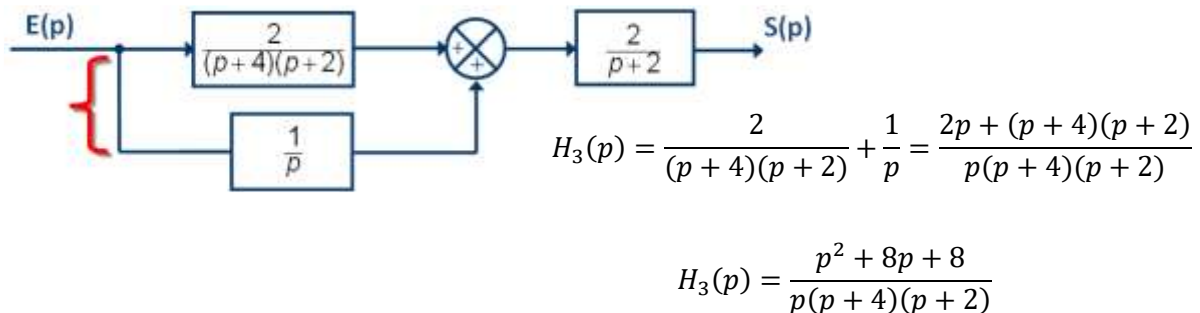
Simplification 1 : boucle fermée



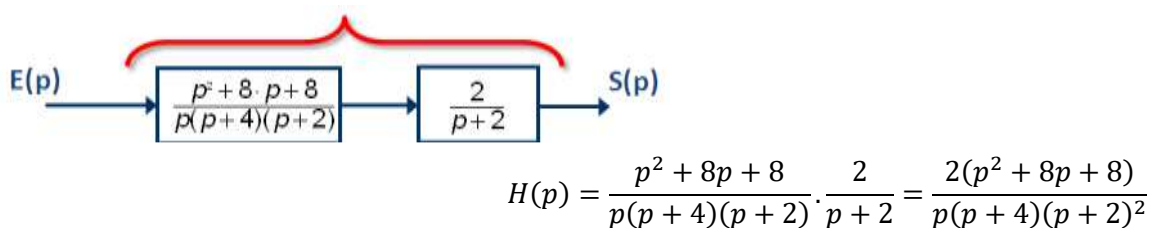
Simplification 2 : blocs en série



Simplification 3 : Blocs en parallèle



Simplification 4 : Blocs en série



6. Déterminer le modèle de connaissance d'un SLCI perturbé

6.1 Perturbations

Définition

Pour qu'un système réponde correctement aux besoins de l'utilisateur, il est important que les performances (stabilité, rapidité et précision) ne varient pas quels que soient les phénomènes extérieurs dit « **perturbations** » qui pourraient les perturber. Exemples :

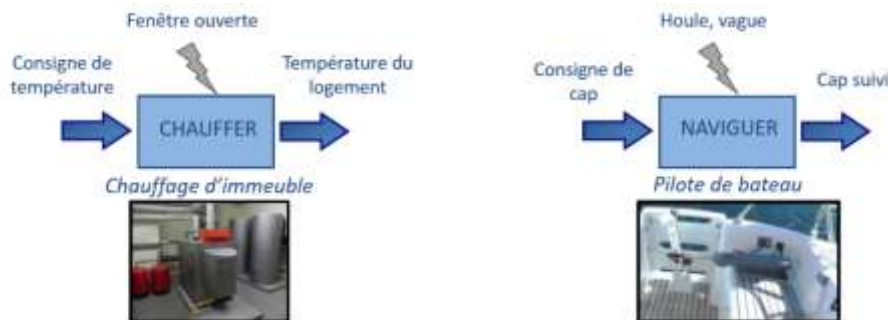
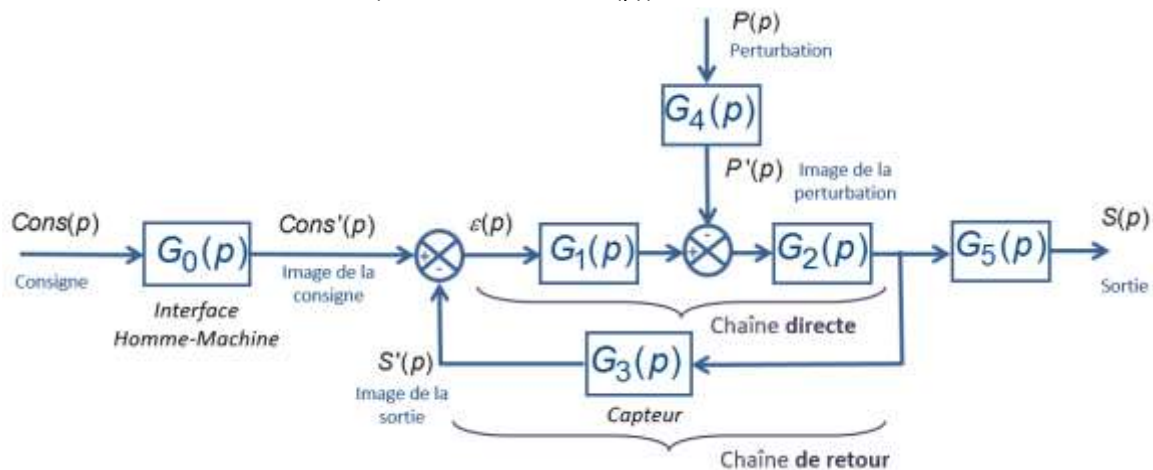


Schéma-bloc d'une grandeur asservie perturbée

Dans le modèle d'un système asservi, la **perturbation** est généralement une **entrée** qui vient modifier la chaîne directe au travers d'un **soustracteur** (voir ci-dessous avec $P(p)$).

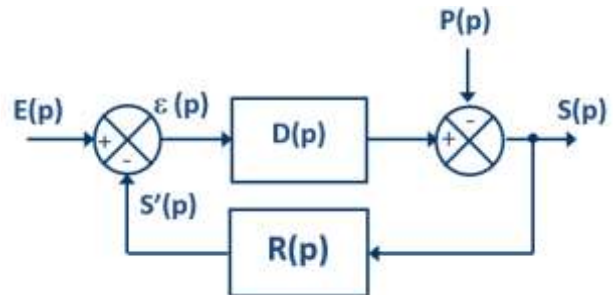


Exemple de modèle de connaissance asservie perturbée

Type d'équation	Eq. temporelle et Laplace	Schéma-bloc
Loi de la dynamique appliquée à l'axe d'un moteur	$c_m(t) - c_r(t) - f \cdot \omega(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$ $C_m(p) - C_r(p) - f \cdot \Omega(p) = J \cdot p \cdot \Omega(p)$ Soit : $\Omega(p) = \frac{1}{f + J \cdot p} (C_m(p) - C_r(p))$	
Loi entrée-sortie cinématique d'un train d'engrenage épicycloïdal à 2 entrées	$\omega_{e1}(t) - \lambda \cdot \omega_{e2}(t) + (\lambda - 1)\omega_s(t) = 0$ $\Omega_{e1}(p) - \lambda \cdot \Omega_{e2}(p) + (\lambda - 1)\Omega_s(p) = 0$ Soit : $\Omega_s(p) = \frac{1}{1 - \lambda} (\Omega_{e1}(p) - \lambda \cdot \Omega_{e2}(p))$	

6.2 Cas d'un modèle à plusieurs entrées : théorème de superposition

Soit un schéma-bloc possédant deux entrées (dont une qui représente une perturbation) comme décrit ci-joint :



Afin de déterminer la fonction de transfert globale, on peut alternativement considérer que $P(p) = 0$ et que $E(p) = 0$:

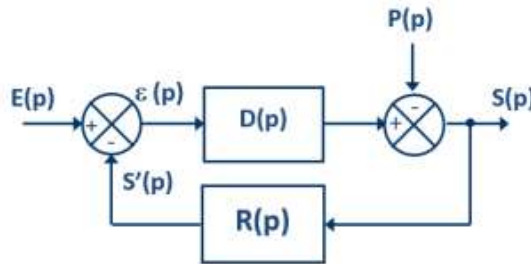
$$\left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{P(p)=0} = H_1(p) \quad \text{et} \quad \left. \frac{S(p)}{P(p)} \right|_{E(p)=0} = H_2(p)$$

Donc : $S(p) = H_1(p).E(p)$ quand $P(p) = 0$ et $S(p) = H_2(p).P(p)$ quand $E(p) = 0$

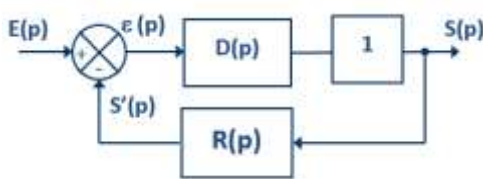
On en déduit par superposition que : $S(p) = H_1(p).E(p) + H_2(p).P(p)$ quand $E(p) \neq 0$ et $P(p) \neq 0$

Remarque : La sortie du modèle est obtenue en additionnant toutes les réponses élémentaires. Une réponse élémentaire est obtenue en n'ayant qu'une seule entrée non nulle. C'est une conséquence directe de la linéarité du modèle.

Exemple : déterminer la fonction de transfert de l'activité d'un système représentée par ce schéma-bloc :

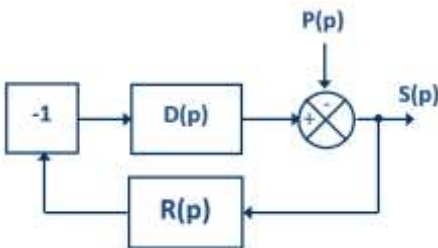


1er cas, $P(p)=0$, le schéma-bloc devient :



$$\left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{P(p)=0} = \frac{D(p).1}{1 + D(p).1.R(p)} = \frac{D(p)}{1 + D(p).R(p)}$$

2^{ème} cas, $E(p)=0$, le schéma-bloc devient :



$$\left. \frac{S(p)}{P(p)} \right|_{E(p)=0} = \frac{-1}{1 - 1.D(p).(-1).R(p)} = \frac{-1}{1 + D(p).R(p)}$$

Lorsque les deux entrées interviennent en même temps, le théorème de superposition donne :

$$S(p) = \frac{D(p)}{1 + D(p).R(p)} E(p) + \frac{-1}{1 + D(p).R(p)} P(p)$$

6.3 Simplification de schéma-bloc avec boucles dépendantes

Pour simplifier et résoudre des problèmes mis sous forme de schéma-bloc, il est parfois nécessaire d'isoler les boucles en déplaçant des blocs, et en **faisant en sorte que 2 comparateurs soient côte à côte afin de les permuter**. Les manipulations suivantes sont à effectuer pour simplifier des problèmes **que si** la présence de boucles dépendantes est constatée.

<p>Déplacement d'un bloc après un point de prélèvement</p>	
<p>Déplacement d'un bloc avant un point de prélèvement</p>	
<p>Déplacement d'un bloc après un comparateur</p>	<p> $S(p) = E_1(p) \times H(p) + E_2(p)$ $S(p) = \left(E_1(p) + E_2(p) \times \frac{1}{H(p)} \right) \times H(p) = E_1(p) \times H(p) + E_2(p)$ </p>
<p>Déplacement d'un bloc avant un comparateur</p>	<p> $S(p) = (E_1(p) + E_2(p)) \times H(p)$ $S(p) = E_1(p) \times H(p) + E_2(p) \times H(p) = (E_1(p) + E_2(p)) \times H(p)$ </p>
<p>Permutation de 2 sommateurs</p>	

6.4 Stabilité et précision d'un modèle perturbé

Stabilité : Pour prévoir la stabilité d'un modèle perturbé, il suffit d'étudier la stabilité de chaque fonction de transfert associée à chaque entrée.

Précision

La valeur finale de la réponse d'un **modèle stable** soumis à **plusieurs entrées en échelon** est égale à $s(+\infty) = \sum K_i \cdot e_i(+\infty)$ avec K_i le gain statique de la fonction de transfert associée à l'entrée $e_i(t)$, et $e_i(+\infty)$ l'amplitude de l'échelon de l'entrée $e_i(t)$.

Cette valeur permettra de déterminer l'erreur en régime permanent, et de prévoir la précision d'un modèle perturbé soumis à des entrées en échelon. Pour des entrées en rampe, il faut utiliser le théorème de la valeur finale.

Sources

J. Le Goff, S. Génouel, « Cours de Sciences Industrielles de l'Ingénieur CPGE 1^{ère} année », Pôle Chateaubriand Joliot-Curie, 2013