

Valider les performances cinématiques d'un mécanisme (partie 1)

PCSI 2019-2020

Table des matières

Introduction.....	2
1. Analyse de modèle cinématique de mécanisme simple	3
1.1 Cadre générale.....	3
1.2 Notion de repère.....	3
1.3 Mouvements	3
1.4 Modèle cinématique d'un mécanisme	4
1.5 Trajectoire d'un point.....	7
2. Position des effecteurs d'un mécanisme en chaîne ouverte.....	9
2.1 Paramètre de mouvement d'une liaison pivot et d'une liaison glissière	9
2.2 Commande des mécanismes en chaîne ouverte et en chaîne fermée	9
2.3 Vecteur position d'un point	10
2.4 Mise en équation de la position d'un point dans une chaîne ouverte.....	10
3. Imposer la vitesse des effecteurs.....	11
3.1 Vecteur vitesse d'un solide S par rapport à un solide de référence 0.....	11
3.2 Champ des vecteurs vitesse d'un solide	12
3.3 Démarche de détermination des vecteurs vitesse dans un mécanisme en chaîne ouverte ...	14
4. Imposer le mouvement des effecteurs d'une chaîne ouverte.....	16
4.1 Définition des torseurs cinématiques.....	16
4.2 Composition des torseurs cinématiques.....	16
4.3 Contrainte du mouvement dans un mécanisme en chaîne ouverte	17
5. Lois entrée-sortie des transmetteurs mécaniques usuels.....	18
Rapport de transmission	18
5.1 Transmetteur à engrenage	18
5.2 Transmetteur à train d'engrenages simple	21
5.3 Transmetteurs pignons-chaîne et poulie-courroie	22
6. Lois entrée-sortie des trains épicycloïdaux.....	23
6.1 Constituants	23
6.2 Loi entrée-sortie cinématique (relation de Willis).....	23
6.3 Conditions géométriques de fonctionnement	24
7. Lois entrée-sortie des transformateurs de mouvement	25
7.1 Transformateurs de mouvements non filetés.....	25
7.2 Transformateurs de mouvements filetés : système vis-écrou.....	26
Sources	27

Introduction

Pour des nombreux systèmes, en particulier pour ceux du domaine de la robotique industrielle ou grand public, un des principaux enjeux de leur concepteur est de faire en sorte qu'ils respectent parfaitement la **cinématique** imposée par leur cahier des charges.

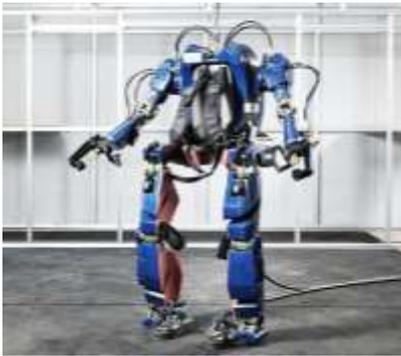
Il s'agit de s'assurer que les **mouvements** des pièces qui les constituent s'exécutent parfaitement suivant des **trajectoires précises** à des **vitesse maîtrisées**.



Robot chirurgical Da Vinci



Robot Kuka jouant au ping-pong



Exosquelette Hyundai



Robot ramasseur d'échantillon sur la lune ou sur mars développé par centre aérospatial allemand

Pour les différents systèmes présentés ci-dessus, il est nécessaire de déterminer des **lois de commande en mouvement à imposer aux actionneurs** de chaque chaîne d'énergie-puissance constituant le système. Ces lois se déterminent en deux étapes :

1- la première étape consiste à **déterminer les lois de commande en mouvement à imposer aux effecteurs** afin de répondre au cahier des charges ;

2- la seconde étape consiste à **déterminer les lois entrée-sortie cinématique de chaque transmetteur** pour en déduire les lois de commande en mouvement à imposer aux actionneurs.

Ce cours devra permettre aux élèves de réaliser cette démarche, à partir d'un cahier des charges donné, pour des systèmes plus ou moins complexes (d'un point de vue cinématique).

1. Analyse de modèle cinématique de mécanisme simple

1.1 Cadre générale

L'objectif de cette partie est de découvrir des démarches et des méthodes permettant de décrire et de caractériser les **mouvements des solides** d'un mécanisme ainsi que les **trajectoires de points particuliers** de ces mécanismes.

Qu'est-ce qu'un solide en SII : un solide correspond à une pièce ou à un groupe de pièces qui sont assemblées (collées, soudées, vissées...) entre elles. Il ne peut donc pas y avoir de mouvements entre les différents éléments constituant un même solide.

Qu'est-ce qu'un mécanisme : Certaine chaîne d'énergie-puissance contiennent plusieurs transmetteurs. L'ensemble de ces transmetteurs, qui permet le transfert de puissance mécanique, est appelé mécanisme.

Lors de l'utilisation d'un mécanisme, les solides qui le constituent se déforment sous l'action des efforts qu'ils subissent. Dans la suite, on fera l'hypothèse que ces déformations sont suffisamment petites pour que l'on puisse les négliger et on considérera les solides comme étant **indéformables**. Cela implique que la distance entre deux points matériels *A* et *B* d'un même solide *S* ne varie pas au cours du temps :

$$\text{Solide indéformable} \Leftrightarrow \forall t, \forall A, B \in S, \|\overrightarrow{AB}\| = \text{Constante}$$

1.2 Notion de repère

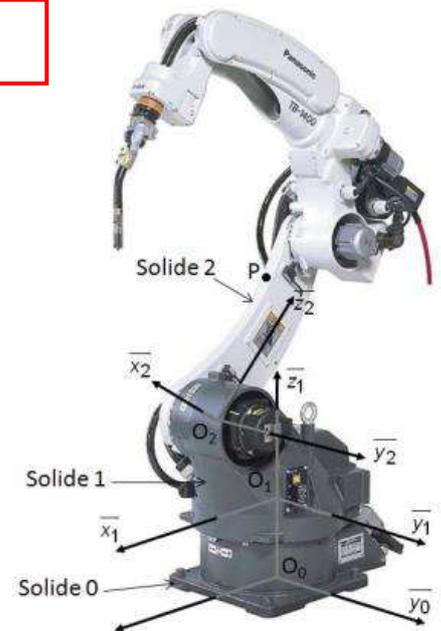
Rappel : un repère, noté $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est constitué de:

- une **origine**, le point *O* dans l'exemple, en général un point particulier du solide ;
- une **base orthonormée directe**, $B = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ dans l'exemple.

On associe à chaque solide un repère. Au solide 0 sera associé le repère $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, au solide 1 le repère $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, etc...

Dans un repère associé à un solide, chaque point matériel du solide, est supposé fixe. Repérer ou positionner, un solide 1 par rapport à un solide 2 revient ainsi à positionner le repère associé au solide 1 par rapport au repère associé au solide 2.

Dans la suite, on parlera indifféremment d'un solide ou du repère qui lui est associé.



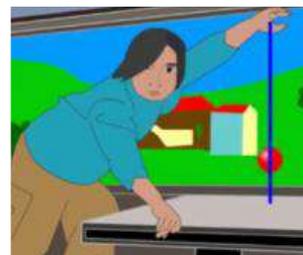
Repères associés aux différents solides d'un robot industriel

1.3 Mouvements

Référentiel

Un mouvement met en jeu trois entités :

- le solide observé;
- le solide de référence ;
- le temps.



Différentes perceptions possible d'une pomme dans un train

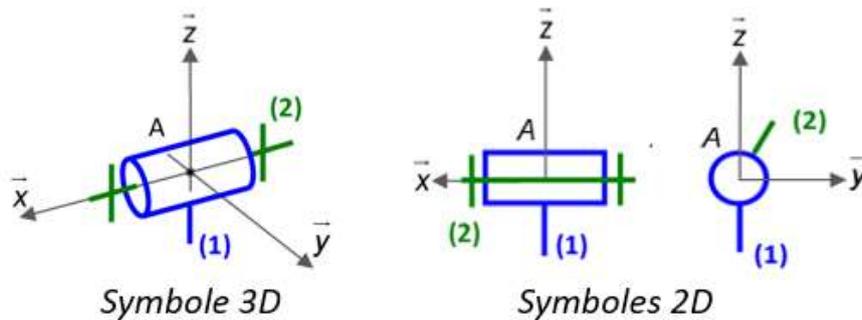
Un mouvement est le déplacement relatif d'un solide par rapport à un solide de référence. Un référentiel est constitué d'un repère de référence, lié à un solide de référence, couplé à une échelle de temps.

Notation : le mouvement d'un solide 1 par rapport à un solide 0 est noté $1/0$.

Mouvement de rotation

Un solide 2 est en **rotation** par rapport à un solide 1 si et seulement si, il existe à chaque instant **une droite** du solide 2 **immobile** par rapport au solide 1.

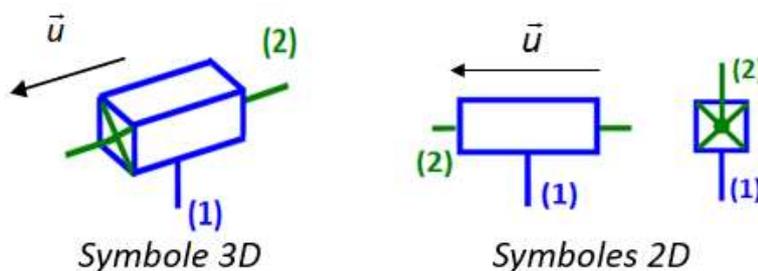
Un mouvement de **rotation** autour d'un axe (A, \vec{x}) entre deux solides 1 et 2, est modélisé par une **liaison pivot d'axe** (A, \vec{x}) dont les symboles normalisés sont ci-dessous :



Mouvement de translation

Un solide 2 est en **translation** par rapport à un solide 1 si et seulement si **tout segment** reliant deux points fixes de 2 **reste parallèle** à lui-même au cours du mouvement.

Un mouvement de **translation à trajectoire rectiligne** de direction \vec{u} est modélisé par une **liaison glissière de direction** \vec{u} , dont les symboles normalisés sont ci-dessous :



Différence entre axe et direction

On parle de liaison pivot **d'axe** et de liaison glissière de **direction** :

- un **axe** est défini par : un **point** + un **vecteur** ;
- une **direction** est définie par uniquement un **vecteur**.

1.4 Modèle cinématique d'un mécanisme

Lorsque l'on souhaite étudier le comportement cinématique d'un mécanisme, il est nécessaire de s'appuyer sur un modèle cinématique.

Ce modèle est représenté par un **schéma cinématique** et/ou un **graphe des liaisons**.

Exemple : prothèse transtibiale :

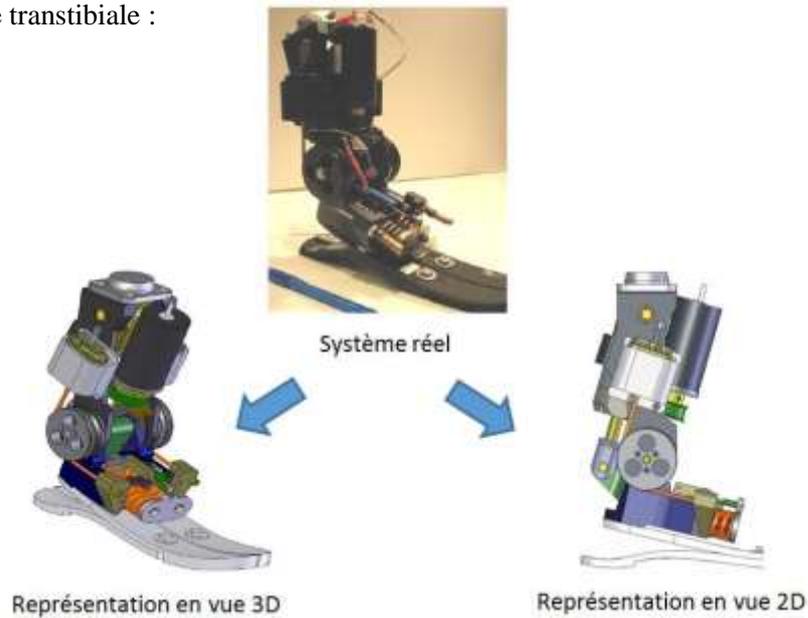
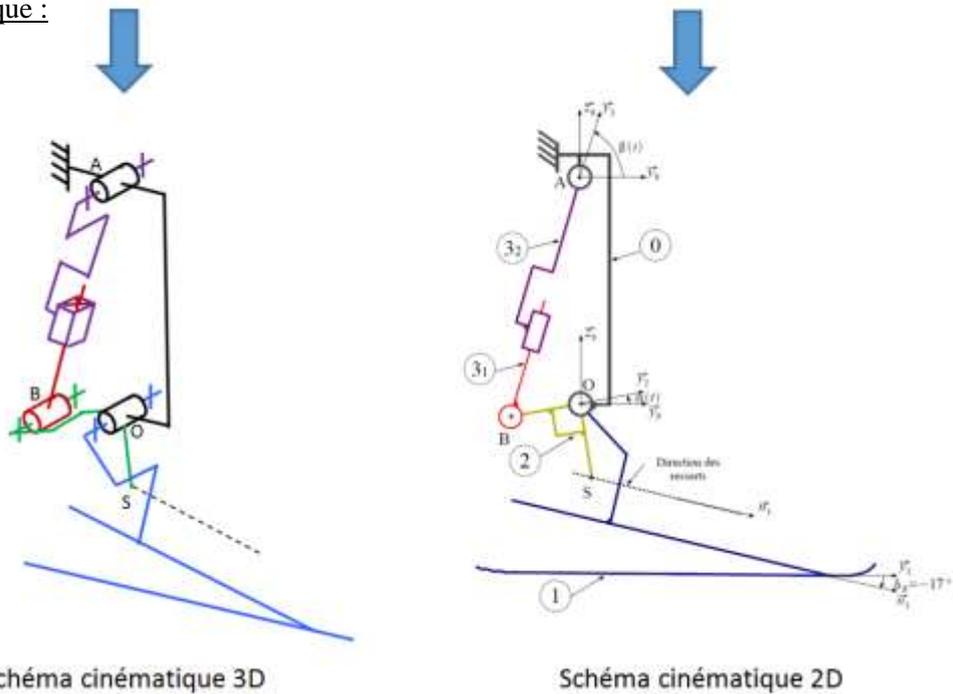
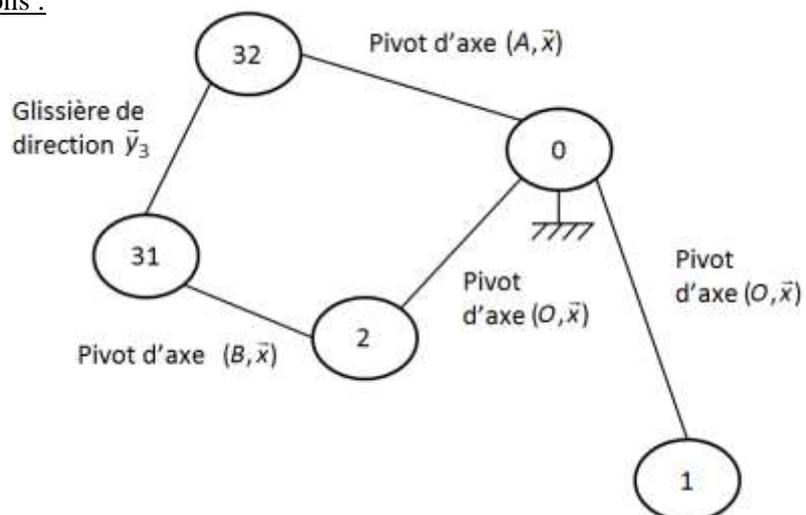


Schéma cinématique :



Graphe des liaisons :



Un **modèle cinématique** est constitué :

- de **solide(s)** (une pièce ou un ensemble de pièces solidaires) ;
- de **liaisons** qui spécifient **les mouvements possibles** et les **mouvements bloqués**, d'un solide par rapport à un autre.

Une liaison est un modèle **indépendant** de toute **réalisation matérielle**. Ce modèle est utilisé en phase d'**analyse de la chaîne d'énergie-puissance d'un système existant**.

Les modèles cinématiques sont aussi utilisés en phase de **conception** d'un nouveau système car ils ne nécessitent pas de connaître la géométrie des pièces ni le choix technologique permettant de réaliser la liaison. Seules les positions relatives des liaisons ainsi que les mouvements possibles sont pris en compte.

Les deux représentations, **schéma cinématique** et **graphe des liaisons**, sont aussi des outils de **communication scientifique** efficaces.

Schéma cinématique d'un mécanisme

Dans un schéma cinématique :

- les **liaisons** sont représentées par des **symboles** normalisés ;
- les **solides** sont représentés par des **traits** reliant ces symboles.

Le schéma est dessiné en deux ou trois dimensions en fonction de la complexité du mécanisme. En plus des symboles et traits de définition des solides, on y trouve des points, des vecteurs et des droites.

Graphe des liaisons d'un mécanisme

Dans un graphe des liaisons :

- les **solides** sont représentés par des **cercles** ;
- les **liaisons** entre les solides sont représentées par des **traits**, le long desquelles on indique le nom et les caractéristiques géométriques de la liaison.

Le graphe des liaisons est graphiquement plus simple à réaliser qu'un schéma cinématique car la géométrie n'est pas représentée.

Cependant, il n'y a pas plus d'informations dans un schéma cinématique que dans le graphe qui lui est associé. Il s'agit de **deux représentations d'un même modèle de comportement cinématique**, mais qui mettent en avant des informations différentes.

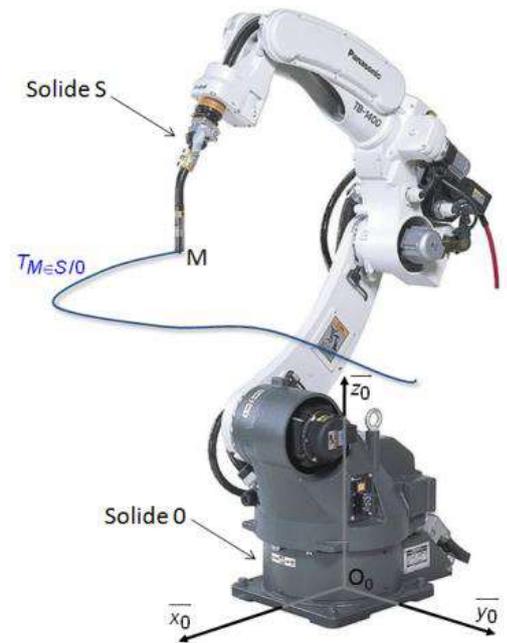
1.5 Trajectoire d'un point

Trajectoire simple

La **trajectoire** d'un **point M fixe dans un solide S**, par rapport à un solide de référence O , est le **lieu des positions successives** occupées par ce point au cours du temps **dans le repère de référence**. C'est la « trace » laissée par le point au cours du temps. On la note alors : $T_{M \in S / O}$

Cela peut-être :

- un **arc de cercle** d'axe (un point, un vecteur), de centre (un point) et de rayon (un segment) ;
- un **segment de droite** porté par la droite (un point, un vecteur) ;
- un **point** ;
- une **courbe quelconque**.



Les trajectoires de points fixes dans un solide en mouvement de **translation à trajectoire rectiligne** (liaison glissière) sont des **segments de droite**.

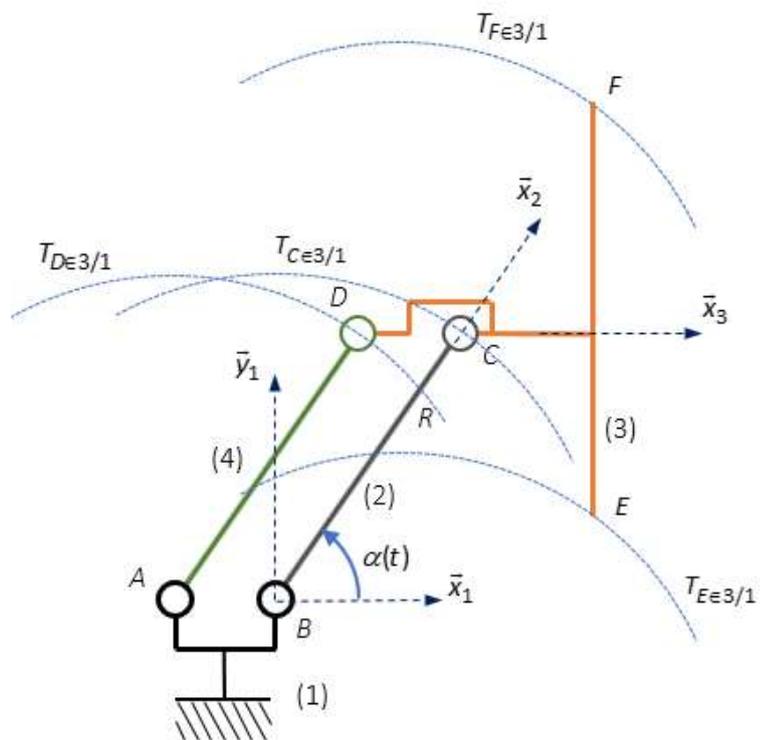
Les trajectoires de points fixes dans un solide en mouvement de **translation à trajectoire circulaire** sont des **arcs de cercle de même rayon**.

Exemple 1 : essuie-glace d'autobus

Le système ci-dessous modélise un essuie-glace d'autobus. Le balai 3 est relié au châssis du bus 1 par l'intermédiaire de deux pièces formant un parallélogramme déformable ABCD (DC reste en permanence parallèle à AB). Le solide 3 a un mouvement de translation par rapport à 1. De plus, C est un point fixe dans 2 et de 3, donc $T_{C \in 2 / 1} = T_{C \in 3 / 1}$

Or le solide 2 est en mouvement de rotation d'axe (B, \vec{z}_1) par rapport à 1. Donc $T_{C \in 2 / 1}$ est un arc de cercle d'axe (B, \vec{z}_1) , de centre B et de rayon $R = BC$.

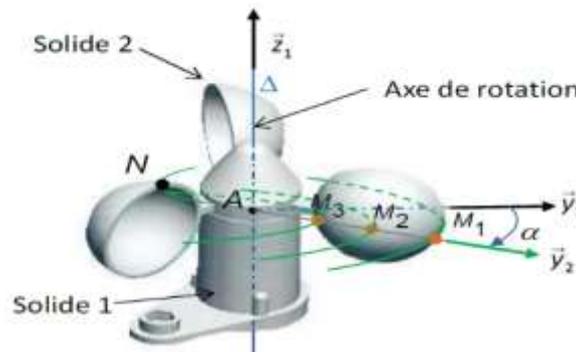
Avec ce mouvement simple, toutes les trajectoires sont des cercles de même rayon R mais d'axes et de centres distincts.



Remarque : Les trajectoires de points fixes dans un solide en mouvement de **rotation autour d'un axe fixe** (liaison pivot) sont des **arcs de cercle de même axe**.

Exemple 2 : rotor d'anémomètre

Tous les points fixes dans le rotor 2 ont une trajectoire en arc de cercle d'axe $\Delta = (A, \vec{z}_1)$, dans leur mouvement par rapport au corps 1 de l'anémomètre.

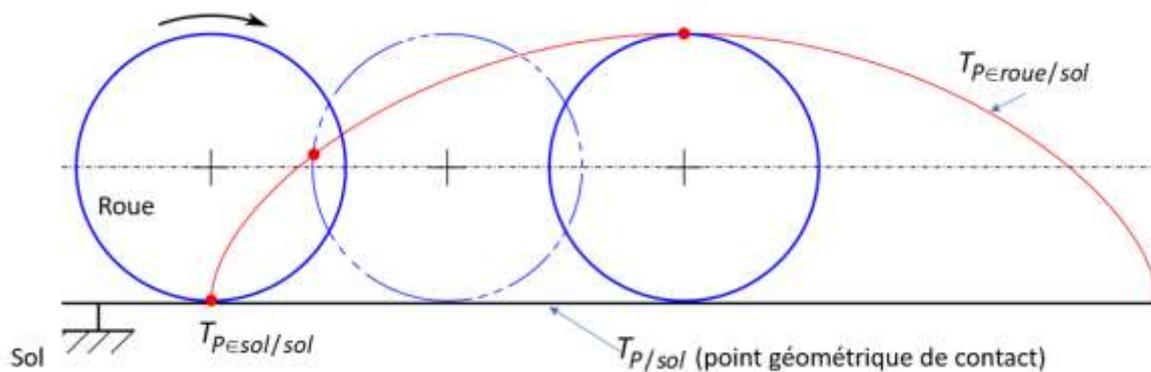


Trajectoire complexe et point de contact

En un point géométrique de contact P entre deux solides 1 et 2, on distingue **3 points coïncidents** à un instant t :

- $P \in 1$, le point lié à 1
- $P \in 2$, le point lié à 2
- $P \notin 1$ et $P \notin 2$ le point géométrique de contact

Exemple : une roue se déplace sur le sol



Au point de contact P entre la roue et le sol, on distingue :

- $P \in sol$: c'est le gravillon fixe du bitume, sa trajectoire par rapport au sol est un point ;
- $P \in roue$: il est attaché à la roue, sa trajectoire par rapport au sol est une cycloïde ;
- P : point géométrique de contact, sa trajectoire est une droite confondu avec le sol (elle représente les positions successives prises par le point géométrique de contact entre la roue et le sol).

Pour déterminer la **trajectoire d'un point géométrique de contact** dans un repère, il sera nécessaire de **déterminer l'expression de son vecteur position dans ce repère** (voir section suivante).

2. Position des effecteurs d'un mécanisme en chaîne ouverte

L'objectif de cette partie est de déterminer une position d'un point et d'obtenir une contrainte sur sa norme ou sa direction en utilisant le produit scalaire.

2.1 Paramètre de mouvement d'une liaison pivot et d'une liaison glissière

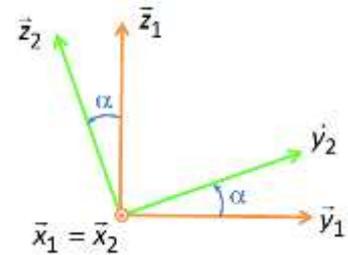
Dans le cas d'un mouvement de translation entre deux solides 1 et 2, les **bases** sont **identiques** : $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, ou $B_1 = B_2$, mais $R_1 \neq R_2$.

Une liaison **glissière de direction** \vec{x}_1 est **paramétrée par la longueur** $\lambda(t)$ tel que $\vec{OM} = \lambda(t) \vec{x}_1$

Une liaison **pivot d'axe** (A, \vec{x}) entre deux solides 1 et 2, est **paramétrée par un angle** $\alpha(t)$ en **radian** tel que : $\alpha(t) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$

Cet angle oriente à chaque instant, la base $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ par rapport à la base $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

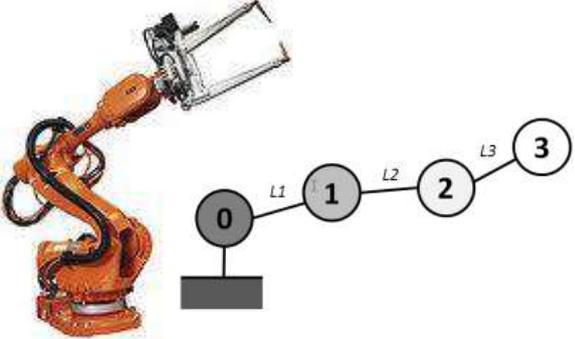
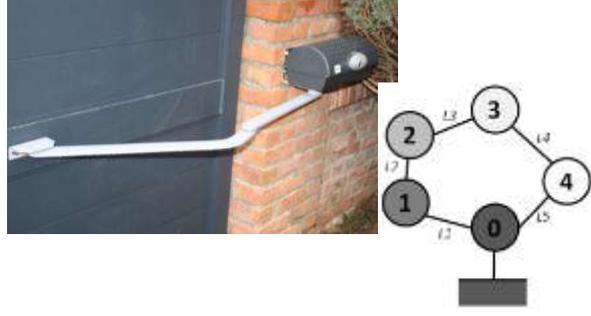
Il est représenté par **une figure de changement de base**



Remarque : Il existe aussi des paramètres caractéristiques.

Contrairement aux paramètres de mouvement qui sont variables, les **paramètres caractéristiques** sont les **paramètres constants** qui influent sur le mouvement. Ce sont en général des paramètres géométriques (longueurs de solides, entraxes...).

2.2 Commande des mécanismes en chaîne ouverte et en chaîne fermée

Chaîne ouverte	Chaîne fermée
 <p>Exemple : bras de robot soudeur</p>	 <p>Exemple : bras articulé de portail</p>
<p>Les paramètres de mouvement sont tous indépendants.</p> <p>Chaque liaison est « motrice » et est pilotée par sa propre chaîne d'énergie-puissance (actionneur, ...).</p> <p>Dans l'exemple ci-dessus, il existe 3 liaisons « motrices », et donc 3 chaînes d'énergie-puissance (3 actionneurs...).</p>	<p>Les paramètres de mouvement sont tous dépendants.</p> <p>Ainsi, une seule liaison est alors « motrice ». Une seule chaîne d'énergie-puissance existe (actionneur, ...).</p> <p>Dans l'exemple ci-dessus, il existe 1 liaison « motrice », et donc 1 chaîne d'énergie-puissance (1 actionneur...).</p>

2.3 Vecteur position d'un point

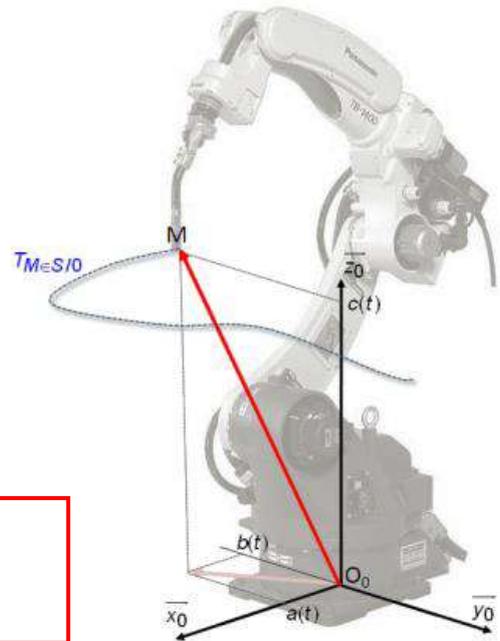
Un **vecteur position** d'un point M fixe dans un solide S , dans son mouvement par rapport à un solide de référence O , est un vecteur $\overrightarrow{Q_{E0}M_{ES}}$ avec Q_{E0} un **point fixe dans le repère associé au solide de référence O** , en général l'origine.

Exemple : robot industriel :

Dans le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ associé au solide de référence, à la date t :

$$\overrightarrow{O_{0E0}M_{ES}}(t) = a(t) \vec{x}_0 + b(t) \vec{y}_0 + c(t) \vec{z}_0$$

La **courbe** ainsi définie par ce **vecteur position** correspond à la **trajectoire** $T_{M \in S / O}$.



Lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté sur le fait qu'un point est fixe dans un solide (centre de gravité d'un solide, origine d'un repère associé à un solide, centre d'une liaison...), il n'est pas utile de le préciser dans la notation. Dans notre exemple : $\overrightarrow{O_{0E0}M_{ES}}(t) = \overrightarrow{O_0M}(t)$.

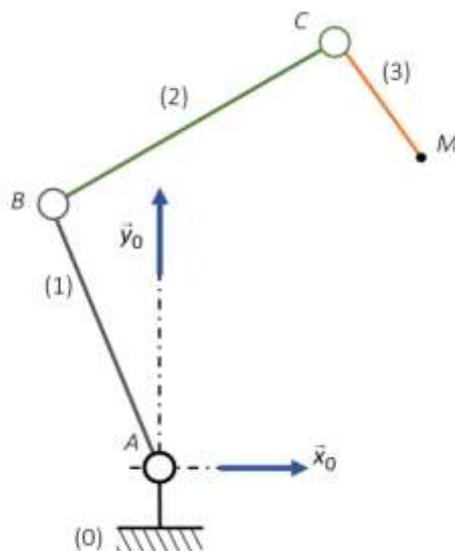
2.4 Mise en équation de la position d'un point dans une chaîne ouverte

Afin de piloter un système (en position et vitesse), il est nécessaire de mettre en équation son comportement cinématique. La **trajectoire**, ou la **position**, d'un point peut être **contrainte** ou **imposée** de la manière suivante :

- contrainte de **distance** ;
- contrainte **d'appartenance** à une **droite** ou un **plan** ;
- contrainte de **trajectoire**.

Ces contraintes sont traduites en équations scalaires à partir du **vecteur position** en utilisant le **produit scalaire**. On obtient **3 équations au maximum** (correspondant projections suivant les 3 axes d'un repère).

Exemple : robot industriel avec un déplacement plan :



Exemples de contraintes permettant la mise en équation du mécanisme :

- le point M doit **rester à une distance d du point A** : $\|\overrightarrow{AM}\| = d$
- le point M doit **rester à une hauteur h du « sol »** : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{y_0} = h$
- le point M doit **suivre une trajectoire verticale** : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{x_0} = \text{constante}$
- le point M doit **suivre une trajectoire verticale** passant par le point $P(x_P, y_P, 0)_{B_0}$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{x_0} = x_P \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0$$
- le point M doit **suivre la trajectoire** définie par $x(t) = 0,3 t$ et $y(t) = 5 t$:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{x_0} = 0,3 t \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{y_0} = 5 t$$

3. Imposer la vitesse des effecteurs

L'objectif de cette partie est de déterminer la vitesse d'un point et d'obtenir une contrainte sur sa norme ou sa direction en utilisant le produit scalaire. Cela pour être utile ultérieurement pour aussi réaliser des lois de commande

3.1 Vecteur vitesse d'un solide S par rapport à un solide de référence 0

Vecteur vitesse angulaire d'un solide S par rapport à 0 : $\vec{\Omega}_{S/0}$

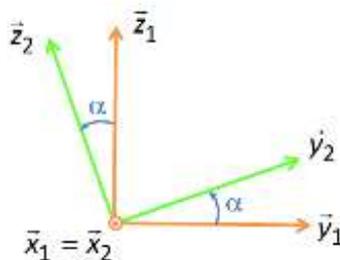
En plus d'être représenté par une figure de changement de base, un mouvement de rotation d'un solide S par rapport à un solide de référence 0 est caractérisé par **un vecteur vitesse angulaire** $\vec{\Omega}_{S/0}$ dont :

- la **direction** indique la direction de l'axe autour duquel la base associée au solide S tourne par rapport à la base associée au solide de référence 0. C'est donc le vecteur unitaire commun aux deux bases et donc facilement repérable sur la figure de changement de base.
- la **norme** en rad/s indique la vitesse du mouvement de rotation relatif ;
- le **signe** indique le sens du mouvement de rotation relatif, par rapport au sens défini positivement lors du paramétrage du mouvement.

Exemple :

$$\vec{\Omega}_{S/0} = \dot{\alpha}(t) \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha}(t) \overrightarrow{x_2}$$

avec $\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}$ en rad/s



On admettra la relation de **composition des vecteurs vitesse angulaire**, généralisée à n solides auxquels sont associés n repères successifs, en mouvement les uns par rapport aux autres :

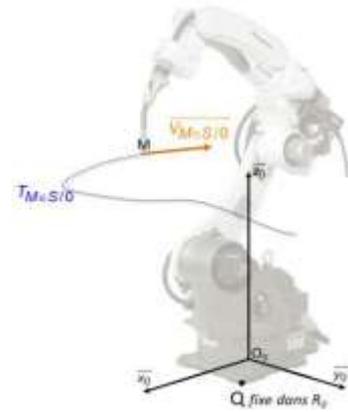
$$\vec{\Omega}_{n/0} = \vec{\Omega}_{n/n-1} + \vec{\Omega}_{n-1/n-2} + \dots + \vec{\Omega}_{1/0} \quad \text{ce qui implique que :} \quad \vec{\Omega}_{i/j} = -\vec{\Omega}_{j/i}$$

Dans le cas d'un mouvement de translation, le **vecteur vitesse angulaire** est **nul** : $\vec{\Omega}_{S/0} = \vec{0}$

Vecteur vitesse du point M d'un solide S par rapport à 0 : $\vec{V}_{M \in S/0}$

Par définition, le **vecteur vitesse** d'un point M fixe dans un solide S , dans son mouvement par rapport à un solide de référence 0 , est la **dérivée temporelle du vecteur position** du point M , **par rapport à la base B_0** :

$$\vec{V}_{M \in S/0} = \left[\frac{d\vec{Q}_{\epsilon_0 M \in S}}{dt} \right]_0 \quad \text{avec } Q \text{ fixe dans } R_0$$



Sa norme est en m/s. Le **vecteur vitesse est tangent à la trajectoire** $T_{M \in S/0}$.

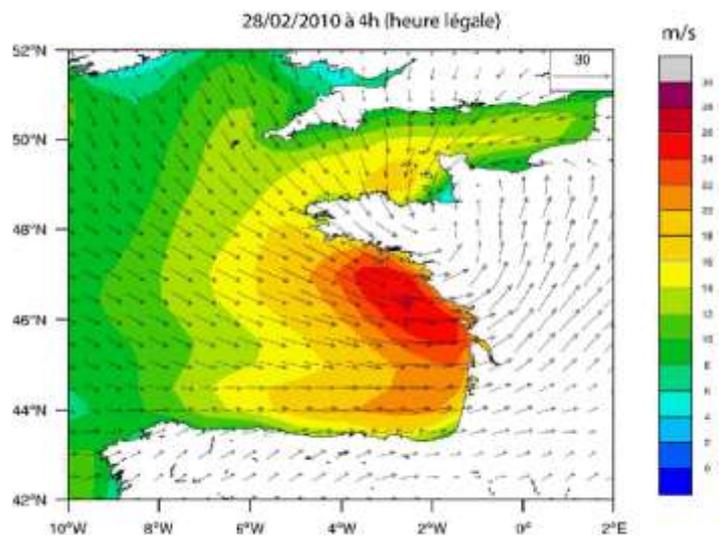
Remarque : En pratique, on utilisera les relations et la démarche présentée en partie 3.3 pour déterminer le vecteur vitesse d'un point d'un solide en mouvement par rapport à un repère de référence. En effet, ces relations permettent de :

- limiter le nombre de vecteurs à dériver ;
- utiliser des résultats connus de la cinématique des mouvements élémentaires ;
- ré-utiliser des vecteurs vitesse déjà déterminés.

3.2 Champ des vecteurs vitesse d'un solide

Définition générale d'un champ : Un champ est une application qui, à tout point d'un domaine géométrique, associe une grandeur physique scalaire ou vectorielle.

Les champs permettent de caractériser l'état d'un système étudié (exemples : champs de pression, de température, champ magnétique ...).



Champ des vecteurs vent pendant la tempête Xynthia

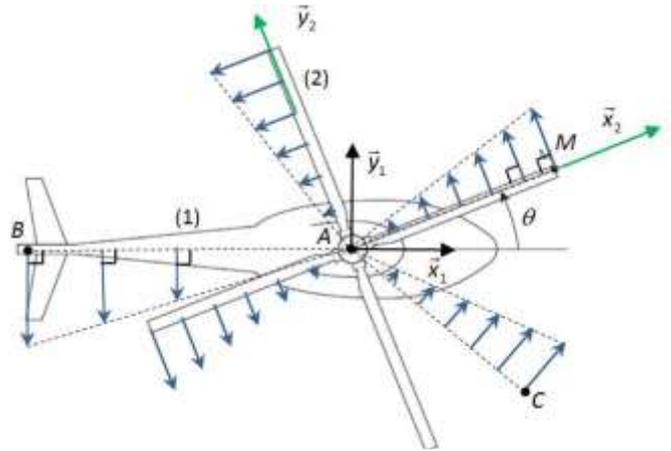
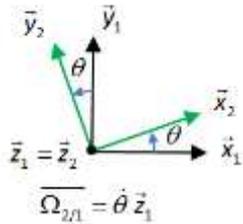
Champ des vecteurs vitesse : Le **champ des vecteurs vitesse** d'un solide 2 par rapport à un solide 1 représente l'**ensemble des vecteurs vitesse des points fixes dans le solide 2** dans son mouvement par rapport au solide 1.

L'hypothèse **d'indéformabilité** des solides considérés permet de montrer que pour tout couple de points A et B fixes dans le solide 2 :

$$\vec{V}_{B \in 2/1} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$$

Solide en rotation

Exemple : Considérons le mouvement de rotation d'axe (A, \vec{z}_1) , paramétré par l'angle $\theta(t)$, des pales 2 par rapport au fuselage 1 d'un hélicoptère.



Un mouvement de rotation a son **axe immobile**.

Ainsi, en tout **point I de l'axe de rotation** (A, \vec{z}_1) , la **vitesse est nulle** :

$$\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$$

Le **vecteur vitesse** de tout point $M \notin (A, \vec{z}_1)$ est tangent à sa trajectoire en arc de cercle et donc **perpendiculaire au rayon** de cet arc de cercle : $\vec{V}_{M \in 2/1} \perp \overrightarrow{AM}$

Par ailleurs, en tout point M : $\vec{V}_{M \in 2/1} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$

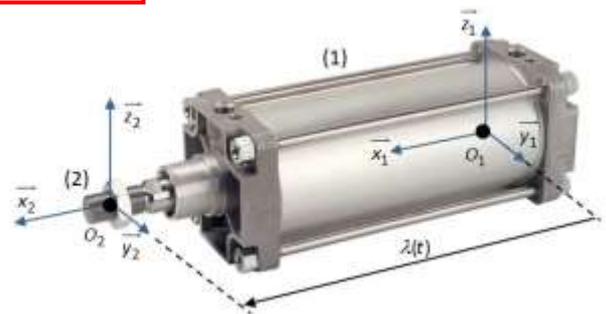
Sachant que $\overrightarrow{MA} \perp \vec{\Omega}_{2/1} : \|\vec{V}_{M \in 2/1}\| = \|\overrightarrow{MA}\|_x \|\vec{\Omega}_{2/1}\|$

Conclusion : Pour des solides en rotation, la **norme** du vecteur vitesse de tout point M est **proportionnelle** à la **distance à l'axe de rotation** et à la **vitesse angulaire** du mouvement en rad/s. Si M est à une distance r de l'axe (A, \vec{z}_1) , alors :

$$\|\vec{V}_{M \in 2/1}\| = r * |\dot{\theta}|$$

Solide en translation à trajectoire rectiligne

Exemple : Considérons le mouvement de translation à trajectoire rectiligne de la tige 2 par rapport au corps 1 du vérin. Ce mouvement est de direction $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$



En tout point M fixe dans 2 :

$$\vec{V}_{M \in 2/1} = \vec{V}_{O_2 \in 2/1} + \overrightarrow{MO_2} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{V}_{O_2 \in 2/1}$$

On retiendra alors les résultats suivants pour des solides en translation à trajectoire rectiligne :

- le **vecteur vitesse angulaire** est nul : $\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0}$
- **tous les points**, fixes dans le solide en translation, ont le **même vecteur vitesse** ;
- ce champ des vecteurs vitesse est uniforme et colinéaire à la direction du mouvement ;
- ce vecteur vitesse, s'exprime sans calcul, à partir de la **dérivée du paramètre de mouvement de la translation**. Dans notre exemple, on a donc :

$$\forall M, \vec{V}_{M \in 2/1} = \dot{\lambda}(t) \vec{x}_1 \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda}(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt}$$

Solide en translation à trajectoire circulaire

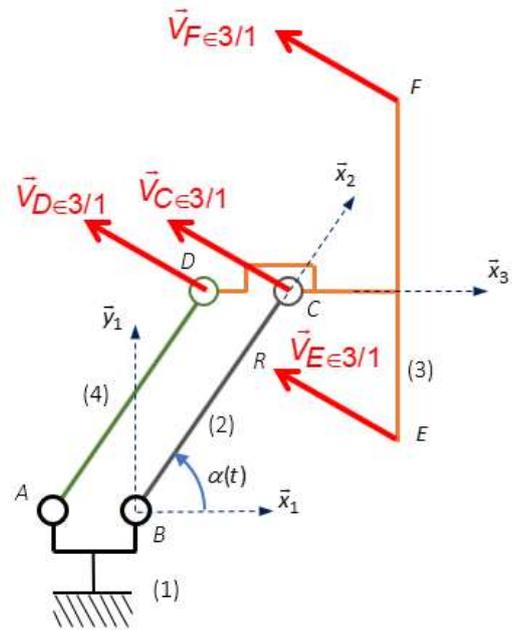
Exemple : Considérons le mouvement de translation à trajectoire circulaire du balais 3 de l'essuie-glace par rapport au châssis 1 de l'autobus.

En tout point M dans 3 :

$$\vec{V}_{M \in 3/1} = \vec{V}_{C \in 3/1} + \overline{MC} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} = \vec{V}_{C \in 3/1}$$

Or, $\vec{V}_{C \in 3/1} = \vec{V}_{C \in 2/1}$ car C est fixe dans 2 et dans 3.

De plus, on a vu précédemment que $\vec{V}_{C \in 2/1} \perp \overline{BC}$. On en déduit alors les différents vecteurs vitesse des points appartenant à 3.



On retiendra alors les résultats suivants pour des solides en translation à trajectoire circulaire :

- le **vecteur vitesse angulaire** est nul $\vec{\Omega}_{3/1} = \vec{0}$;
- **tous les points**, fixes dans le solide en translation, ont le **même vecteur vitesse**.

Composition des vecteur vitesse

La relation de **composition des vecteurs vitesse** en un **même point**, généralisée à n solides, auxquels sont liés n repères successifs, en mouvement les uns par rapport aux autres, s'écrit :

$$\vec{V}_{P \in n/0} = \vec{V}_{P \in n/n-1} + \vec{V}_{P \in n-1/n-2} + \dots + \vec{V}_{P \in 1/0} \quad \text{ce qui implique que : } \vec{V}_{P \in i/j} = -\vec{V}_{P \in j/i}$$

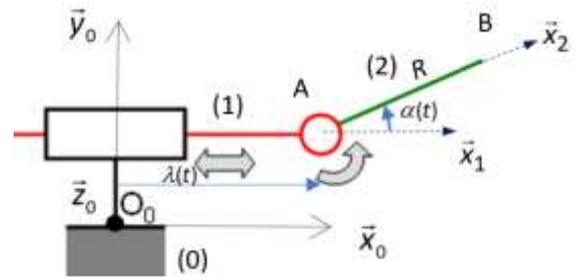
3.3 Démarche de détermination des vecteurs vitesse dans un mécanisme en chaîne ouverte

Pour déterminer le vecteur vitesse d'un point B, fixe dans 2 dans son mouvement par rapport à 0 ($\vec{V}_{B \in 2/0}$), quatre démarche de détermination du vecteur vitesse peuvent être appliquées :

- **si le mouvement de 2/0 est une rotation**, utiliser la relation du champ des vecteurs vitesse en un point I de l'axe de rotation de 2/0 : $\vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{V}_{I \in 2/0} + \overline{BI} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$
- **si le mouvement de 2/0 est une translation à trajectoire rectiligne**, paramétrée par la longueur λ , utiliser : $\vec{V}_{B \in 2/0} = \dot{\lambda}(t) \vec{u}$
- **si le mouvement de 2/0 est une translation à trajectoire circulaire**, changer de point (si besoin) pour faciliter la suite du calcul : $\vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{V}_{C \in 2/0}$ puis déterminer le nouveau vecteur par la composition des vecteurs vitesse ;
- **sinon, utiliser la relation de composition des vecteurs vitesse**, pour se ramener à des vitesses de mouvement élémentaire : $\vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{V}_{B \in 1/0}$, puis déterminer les vecteurs composés par une des trois méthodes ci-dessus. 2/0

Exemple 1 : Bras de robot avec une liaison glissière et pivot

L'effecteur est placé à l'extrémité B du bras. On recherche alors généralement à déterminer le vecteur vitesse en B fixe dans 2/0 soit $\vec{V}_{B \in 2/0}$. Dans notre cas ici, le mouvement de 2/0 n'est pas un des 3 mouvements élémentaires : il y a une translation et une rotation en série. Il est alors nécessaire d'utiliser la relation de composition des vecteurs vitesse :



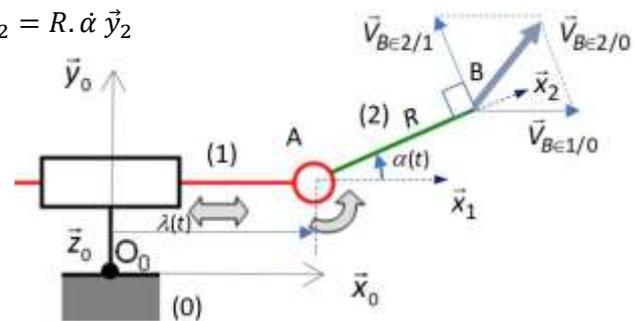
$$\vec{V}_{B \in 2/0} = \underbrace{\vec{V}_{B \in 2/1}}_{\text{rotation } (A, \vec{z}_0)} + \underbrace{\vec{V}_{B \in 1/0}}_{\text{translation } \vec{x}_0}$$

En prenant maintenant chaque mouvement indépendamment :

Rotation : $\vec{V}_{B \in 2/1} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \overline{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -R \vec{x}_2 \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_2 = R \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_2$

Translation : $\vec{V}_{B \in 2/1} = \dot{\lambda} \vec{x}_0$

Donc $\vec{V}_{B \in 1/0} = R \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_2 + \dot{\lambda} \vec{x}_0$



Exemple 2 : Essuie-glace d'autobus

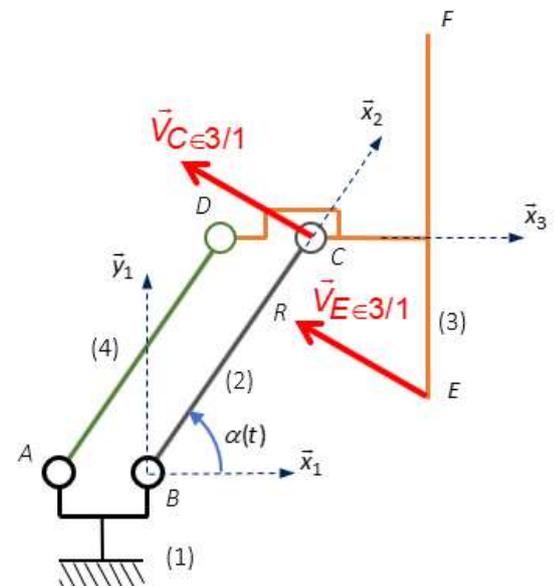
On recherche le vecteur vitesse d'une des extrémités de l'essuie-glace. On s'intéresse alors au vecteur vitesse du point E fixe dans 3/1 soit $\vec{V}_{E \in 3/1}$. Dans notre cas ici, le mouvement de 3/1 est un mouvement de translation à trajectoire circulaire. On a alors : $\vec{V}_{E \in 3/1} = \vec{V}_{C \in 3/1}$.

Or C est fixe dans 3 et 2 donc $\vec{V}_{C \in 3/1} = \vec{V}_{C \in 2/1}$

De plus, le mouvement de 2/1 est une rotation d'axe (B, \vec{z}_1)

Donc $\vec{V}_{C \in 2/1} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \overline{CB} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -R \vec{x}_2 \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_2 = R \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_2$

Ainsi : $\vec{V}_{E \in 3/1} = R \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_2$



Remarque : Dans les différents cas, on s'attachera à :

- laisser le résultat dans des bases différentes (pas forcément celle du repère fixe) pour alléger l'écriture
- vérifier que le résultat est bien homogène à une vitesse linéaire (m/s)

4. Imposer le mouvement des effecteurs d'une chaîne ouverte

Grâce à la relation du champ des vecteurs vitesse, on peut, connaissant la vitesse d'un point d'un solide et son vecteur vitesse angulaire dans son mouvement par rapport à un repère de référence, **déterminer la vitesse de tous les autres points du solide.**

4.1 Définition des torseurs cinématiques

Le couple formé par le **vecteur vitesse angulaire d'un solide** $\vec{\Omega}_{2/1}$ et le **vecteur vitesse d'un point** $\vec{V}_{A \in 2/1}$ constitue le **torseur cinématique** $\{V_{2/1}\}$ du solide 2 dans son mouvement par rapport au solide 1 et exprimé au point A. Il est noté :

$$\{V_{2/1}\} =_A \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{A \in 2/1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} \vec{\Omega}_{2/1} \text{ la résultante cinématique} \\ \vec{V}_{A \in 2/1} \text{ le moment cinématique au point A} \end{matrix}$$

On a alors deux torseur cinématique particuliers :

- Le torseur cinématique d'une **liaison glissière de direction** \vec{x} et de paramètre de mouvement λ :

$$\{V_{2/1}\} =_{\forall P} \begin{cases} \vec{0} \\ \lambda \vec{x} \end{cases}$$

- Le torseur cinématique d'une **liaison pivot d'axe** (A, \vec{z}) et de paramètre de mouvement α :

$$\{V_{2/1}\} =_{P \in (A, \vec{z})} \begin{cases} \alpha \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} =_{P \notin (A, \vec{z})} \begin{cases} \alpha \vec{z} \\ r \alpha \vec{z} \end{cases}$$

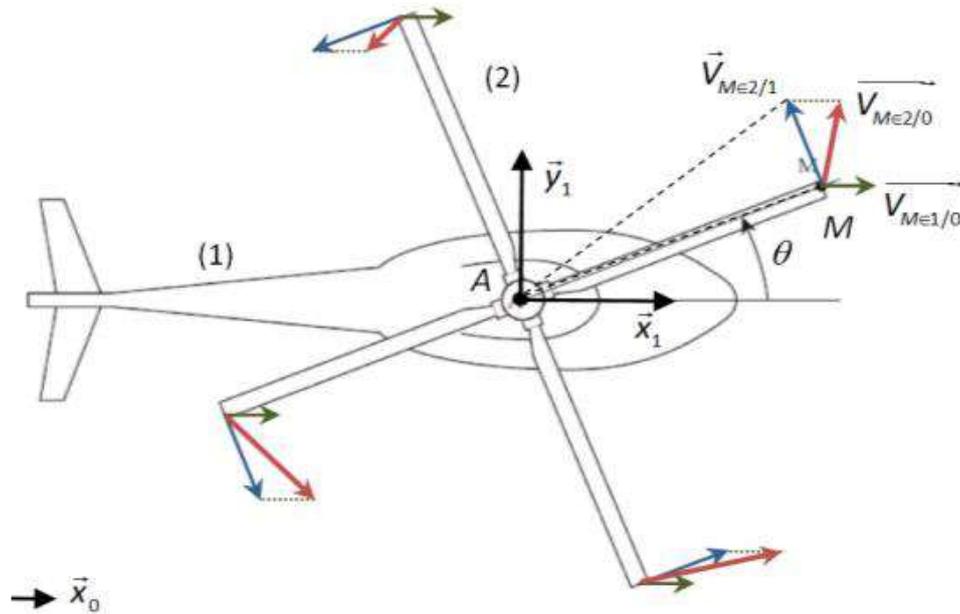
4.2 Composition des torseurs cinématiques

Relation de **composition des torseurs cinématiques** dans le cas de n solides :

$$\{V_{n/0}\} = \{V_{n/n-1}\} + \dots + \{V_{1/0}\} \quad \text{ce qui implique que} \quad \{V_{2/1}\} = -\{V_{1/2}\}$$

Attention : Les torseurs doivent être impérativement exprimés au même point pour pouvoir être additionnés !

Exemple :



$$\{V_{1/0}\} = \begin{matrix} \vec{0} \\ \lambda \vec{x} \end{matrix}_{\forall P} = \begin{matrix} \vec{0} \\ \lambda \vec{x} \end{matrix}_A = \begin{matrix} \vec{0} \\ \lambda \vec{x} \end{matrix}_M$$

$$\{V_{2/1}\} = \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}_{P \in (A, \vec{z}_1)} = \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}_A = \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ r \dot{\alpha} \vec{y}_2 \end{matrix}_M$$

$$\{V_{2/0}\} = \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\} = \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \lambda \vec{x} \end{matrix}_A = \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \lambda \vec{x} + r \dot{\alpha} \vec{y}_2 \end{matrix}_M$$

4.3 Contrainte du mouvement dans un mécanisme en chaîne ouverte

Soit un mouvement particulier imposé, défini par un torseur $\{V_{S/0} \text{ imposé}\}$

Soit $\{V_{S/0}\}$ le torseur cinématique déterminé en fonction des paramètres de mouvement.

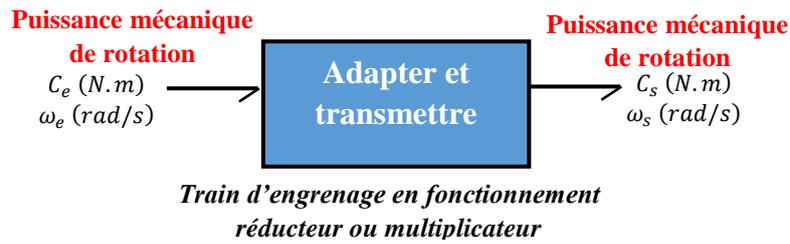
La **contrainte** du mouvement s'écrit alors : $\{V_{S/0}\} = \{V_{S/0} \text{ imposé}\}$

Cette équation donne **2 équations vectorielles** :

- égalité des vecteurs vitesse angulaire du solide ;
- égalité des vecteurs vitesse **en un même point** ;

Ces différentes égalités peuvent alors donner jusqu'à **6 équations scalaires**.

5. Lois entrée-sortie des transmetteurs mécaniques usuels



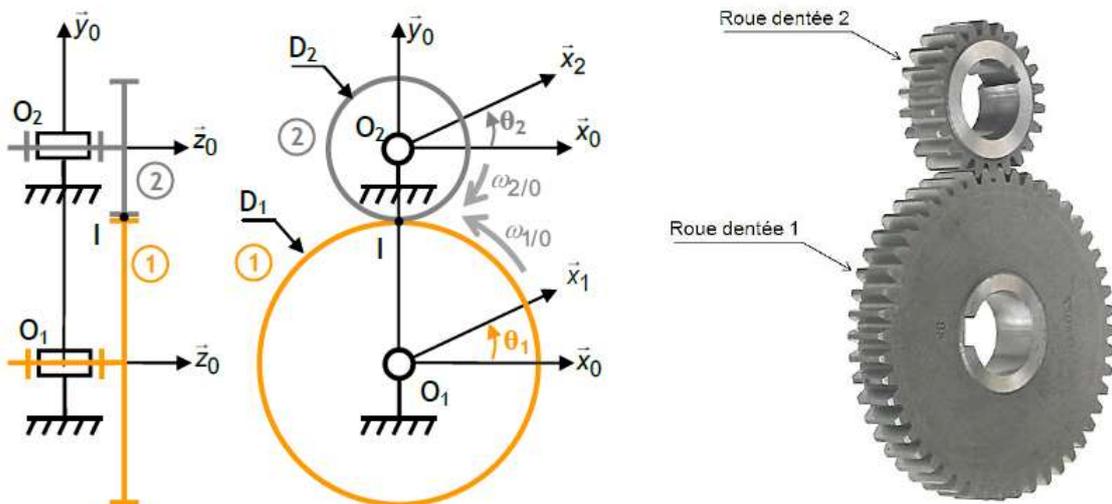
Rapport de transmission

Une loi entrée-sortie cinématique caractérise le comportement cinématique du transmetteur. **Pour un réducteur ou un multiplicateur**, elle est donnée par le **rapport de transmission** qui est le rapport entre la vitesse angulaire de sortie ω_s (ou N_s) et la vitesse angulaire d'entrée ω_e (ou N_e) :

$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\dot{\theta}_s}{\dot{\theta}_e} = \frac{N_s}{N_e} \quad \text{avec } \omega \text{ en rad/s et } N \text{ en tr/min. On a : } \omega = \frac{2\pi N}{60}$$

Selon la valeur de ce rapport (<1 ou >1), on parle de **multiplicateur** ou de **réducteur de vitesse**.

5.1 Transmetteur à engrenage



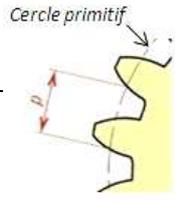
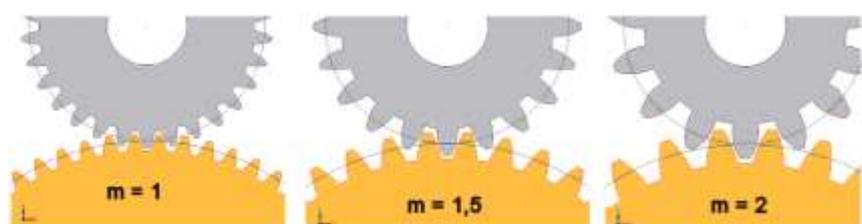
Utilisation : Transmissions de faible et forte puissances. (de la montre... à la boîte de vitesse automobile... jusqu'aux éoliennes)



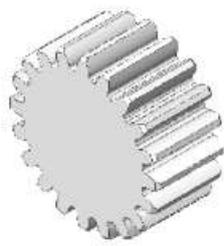
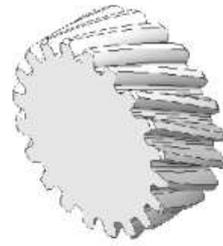
Principe :

Un **engrenage** est constitué de **deux roues dentées** qui engrènent l'une avec l'autre. La géométrie de la denture permet d'obtenir le roulement sans glissement au point *I* de contact des roues, et donc de transmettre le mouvement de la roue 1 dite « *menante* » à la roue 2 dite « *menée* ». Le point de contact des deux roues se déplace alors au niveau des **cercles primitifs** de chacune des roues (à voir par la suite).

Caractéristiques géométriques

Diamètre primitif	D_1 et D_2 : diamètres des cercles primitifs, c'est-à-dire des roues de friction équivalentes qui donneraient la même cinématique
Nombre de dents	Z_1 pour la roue 1 et Z_2 pour la roue 2
Pas primitif	$pas = \frac{\pi \cdot D_i}{Z_i} = \pi \cdot m$ 
Module	 <p>m (en mm) : caractérise la forme des dents</p> <p>On a : $D_i = m \cdot Z_i$ d'où $pas = \pi \cdot m$</p>

Caractéristiques de fonctionnement

Module	Pour que deux roues dentées engrènent , elles doivent avoir le même module .	
Lieu d'engrènement	Roulement sans glissement au point de tangence <i>I</i> des cercles primitifs La vitesse de glissement étant nulle : $\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$	
Entraxe	a_{12} : distance entre les axes des roues dentées (O_1, \vec{z}_0) et (O_2, \vec{z}_0)	
Profil de denture	<p>Denture droite</p>  <p>Avantage : peut admettre des déplacements axiaux</p> <p>Inconvénient : vibration, bruyant</p>	<p>Denture hélicoïdale</p>  <p>Avantages : plus silencieux, transmet des couples plus importants</p> <p>Inconvénient : crée des efforts axiaux</p>

Agencement

	Engrenage cylindrique à contact extérieur	Engrenage cylindrique à contact intérieur	Engrenage conique
Forme			
Axes de rotation	Parallèles	Parallèles	Concourants
Rapport de transmission	$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{D_1}{D_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$	$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = +\frac{D_1}{D_2} = +\frac{Z_1}{Z_2}$	$\left \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} \right = \frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$
Remarque : ces engrenages peuvent multiplier ou réduire jusqu'à un rapport 10			
Entraxe	$a_{12} = \frac{D_1 + D_2}{2} = m \frac{Z_1 + Z_2}{2}$	$a_{12} = \frac{D_2 - D_1}{2} = m \frac{Z_2 - Z_1}{2}$	

Cas particulier de la roue vis sans fin

	Engrenage cylindrique à contact extérieur	
Forme		Exemple, vis à 3 filets :
Axes de rotation	Orthogonaux non concourants (dits « gauches »)	
Rapport de transmission	$\left \frac{\omega_{roue/0}}{\omega_{vis/0}} \right = \frac{Z_{vis}}{Z_{roue}}$ avec Z_{vis} le nombre de filet de la vis	

Avantages : rapport de réduction important (jusqu'à 150) et irréversibilité si nécessaire (la vis entraîne la roue mais la roue compte tenu de l'inclinaison de l'hélice, ne peut pas entraîner la vis)

Inconvénients : faible rendement et forte usure.

5.2 Transmetteur à train d'engrenages simple

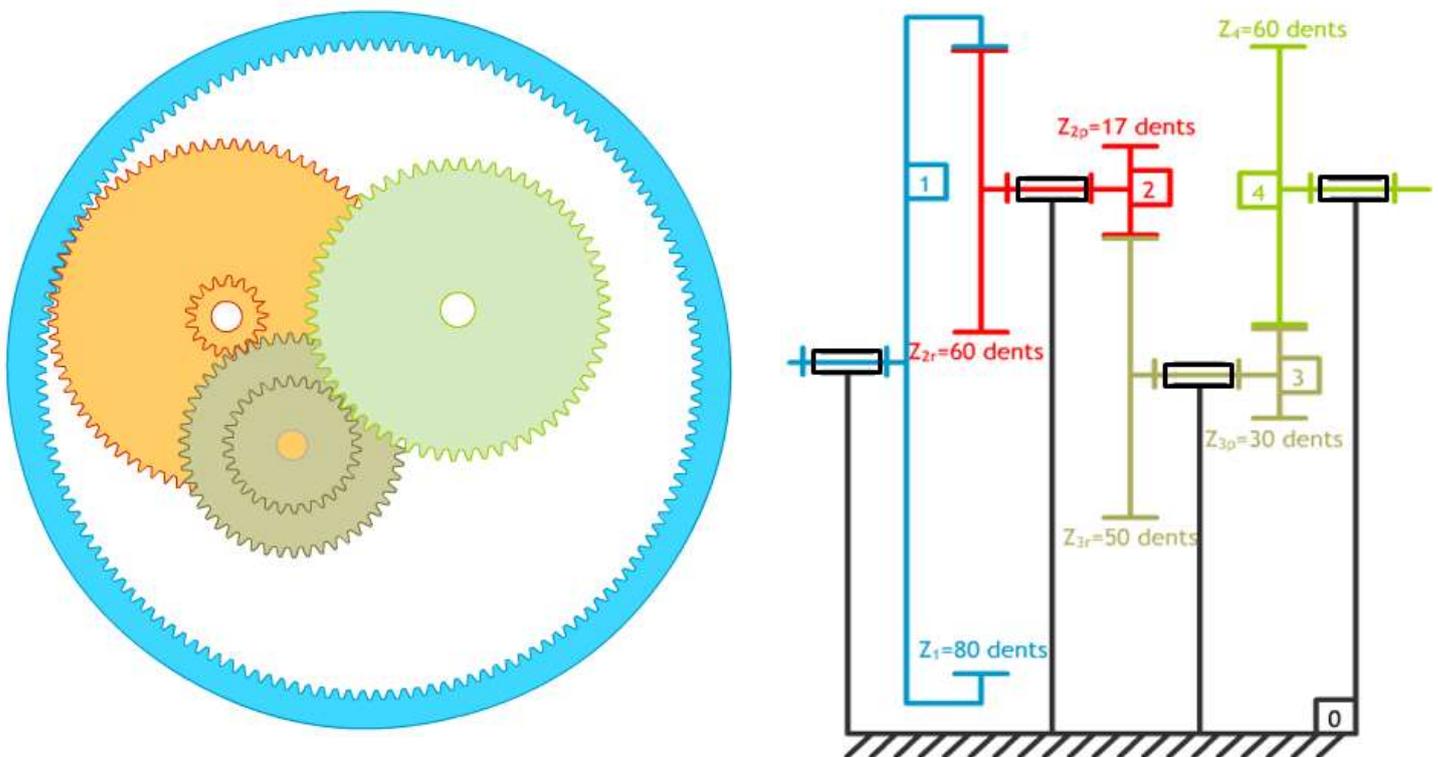
Dans un transmetteur, on peut associer plusieurs engrenages à la suite pour augmenter le rapport de réduction ou de multiplication. On parle alors de **train d'engrenages**. Quand tous les axes de rotation des roues dentées sont fixes par rapport au bâti, on parle de **train simple**.

Rapport de transmission d'un train simple d'engrenages :

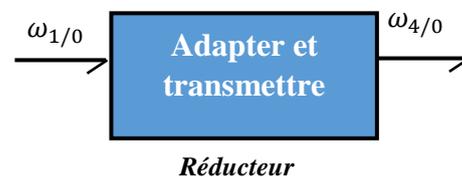
$$\frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = \prod r_{\text{rapport } i} = \prod \frac{\pm D_{e_i}}{D_{s_i}} = \prod \frac{\pm Z_{e_i}}{Z_{s_i}}$$

Ou $\left| \frac{\omega_{\text{roue}/0}}{\omega_{\text{vis}/0}} \right| = \prod r_{\text{rapport } i} = \prod \frac{D_{e_i}}{D_{s_i}} = \prod \frac{Z_{e_i}}{Z_{s_i}}$ si le train comporte des engrenages non parallèle

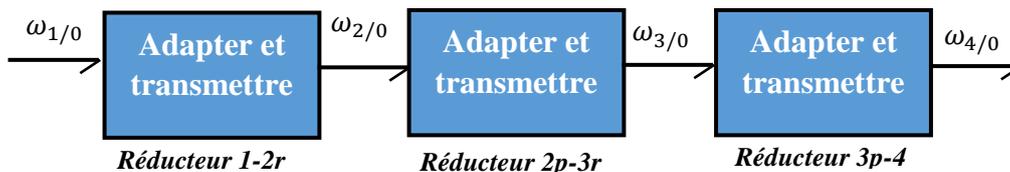
Exemple : rapport de transmission d'un réducteur à train simple avec 3 étages de réduction



Soit 1 la roue d'entrée et 4 la roue de sortie :



Equivalent à :

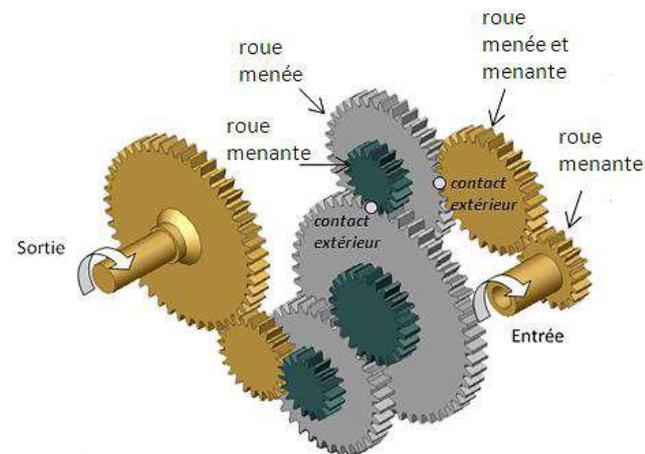


Le rapport de transmission vaut alors :

$$\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} \cdot \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{2/0}} \cdot \frac{\omega_{4/0}}{\omega_{3/0}} = \frac{Z_1}{Z_{2r}} \cdot \frac{-Z_{2p}}{Z_{3r}} \cdot \frac{-Z_{3p}}{Z_4} = \frac{30}{60} \cdot \frac{17}{50} \cdot \frac{80}{60} = 0,23 \approx \frac{1}{4}$$

Cela signifie que ce réducteur divise la vitesse angulaire quasiment par quatre.

Remarque : Dans un train d'engrenages, on qualifie de **roue menante** toute roue motrice, et de **roue menée** toute roue réceptrice. Si une roue est à la fois menante et menée, son nombre de dents n'intervient pas dans le rapport de transmission mais il peut y avoir une incidence sur son signe.



5.3 Transmetteurs pignons-chaîne et poulie-courroie

Poulies-courroie	Pignons-chaîne
<p>Utilisation : distribution dans un moteur thermique</p>	<p>Utilisation : vélo</p>

Dans ces transmetteurs, les poulies ou les pignons tournent dans le **même sens**. Le rapport de transmission s'écrit de la même façon que précédemment :

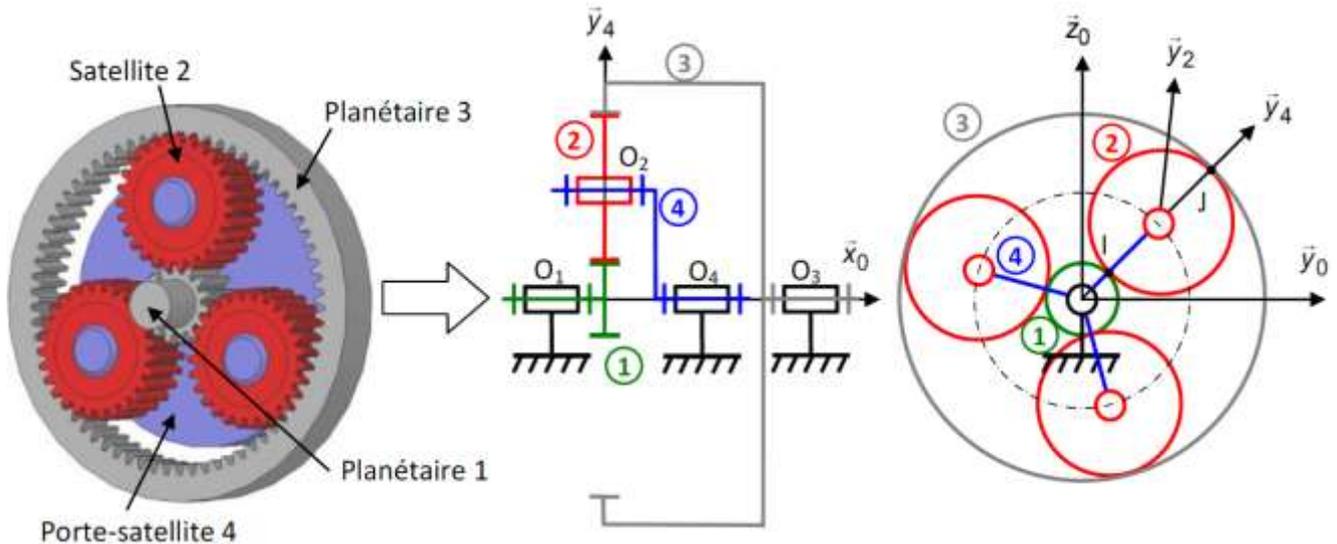
$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Ces transmetteurs sont particulièrement avantageux quand il s'agit de **transmettre un mouvement de rotation entre deux axes parallèles très distants**. Attention, ces transmetteurs peuvent être utilisés en transformateur de mouvement (voir partie 7).

6. Lois entrée-sortie des trains épicycloïdaux

Pour obtenir un très grand rapport de transmission avec un train d'engrenages simple, il faut utiliser plusieurs étages, ce qui est lourd et encombrant. Les trains épicycloïdaux permettent d'obtenir de grand rapport de réduction dans un encombrement faible.

6.1 Constituants



Satellite : Roue dentée dont son axe de rotation n'est pas fixe par rapport au bâti.

Porte-satellite : Pièce en rotation d'axe fixe par rapport au bâti, sur laquelle sont montés le(s) satellite(s).

Planétaire : Roue dentée (pignon ou couronne) d'axe fixe par rapport au bâti, qui engrène avec le(s) satellite(s).

Remarque : L'un des deux planétaires ou le porte-satellite peuvent être les pièces d'entrée ou de sortie du transmetteur. Afin de maximiser le rapport de transmission (pour une dimension donnée), il est nécessaire que l'un des deux planétaires soit en entrée en fonctionnement réducteur (ou en sortie en fonctionnement multiplicateur) et que le porte satellite soit en sortie (ou en entrée en fonctionnement multiplicateur).

6.2 Loi entrée-sortie cinématique (relation de Willis)

Si on observe le mouvement depuis le porte-satellite, on retrouve une situation où tous les axes sont fixes (par rapport au porte-satellite), comme dans le cas des trains simples. Pour déterminer la loi d'entrée-sortie d'un train épicycloïdal, on utilise la formule pour les trains simples, non-pas vue du bâti mais du porte-satellite, en prenant comme entrée et sortie les planétaires :

$$\lambda = \frac{\omega_{pla A/ps}}{\omega_{pla B/ps}} = \prod rapport_i$$

avec : λ la **raison de base du train épicycloïdal** (rapport de transmission vu du porte satellite), l'indice $pla A$ le planétaire A, l'indice $pla B$ le planétaire B et l'indice ps le poste satellite.

Par composition des vitesses angulaires, on obtient : $\lambda = \frac{\omega_{pla A/o} - \omega_{ps/o}}{\omega_{pla B/o} - \omega_{ps/o}}$

En écrivant cette expression de telle sorte à ne plus avoir de termes au dénominateur, on obtient la loi entrée-sortie cinématique d'un train épicycloïdal que l'on appelle aussi relation de Willis :

$$\omega_{pla A/0} - \lambda \cdot \omega_{pla B/0} + (\lambda - 1)\omega_{ps/0} = 0$$

avec : $\lambda = \frac{\omega_{pla A/0}}{\omega_{pla B/0}} \Big|_{\omega_{ps/0}=0} = \prod rapport_i$

Un train épicycloïdal est un système qui peut avoir **3 entrées-sorties différentes** : $\omega_{pla A/0}, \omega_{pla B/0}, \omega_{ps/0}$. L'utilisation d'un train épicycloïdal nécessite alors d'imposer la vitesse angulaire par rapport au bâti de **deux des trois entrées possibles. Dans la pratique, on bloque souvent l'une d'entre-elles** ; on impose la vitesse angulaire à la deuxième ; la troisième est alors donnée par la relation de Willis. On a alors la démarche ci-dessous qui permet de déterminer la loi entrée-sortie cinématique d'un train épicycloïdal :

1. Écrire la relation de Willis et calculer la raison de base sans tenir compte du fait que certains éléments sont bloqués ou ont une vitesse imposée.
2. Simplifier la relation obtenue en tenant compte de la configuration du système : éléments ayant une vitesse nulle ou imposée.

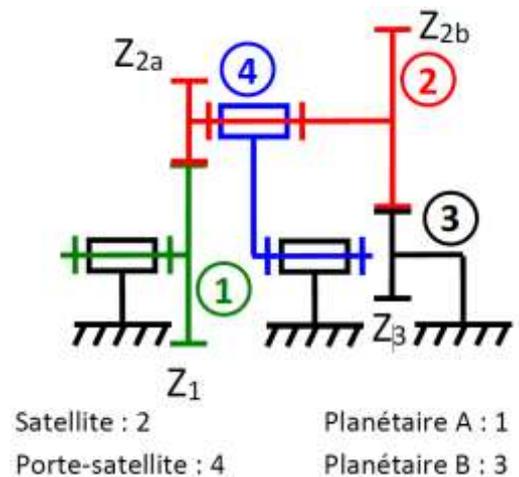
Exemple :

Soit 1 la pièce d'entrée de ce transmetteur et 4 la pièce de sortie (la pièce 3 est fixe). On cherche alors à déterminer le rapport de transmission : $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$

$$1. \begin{cases} \omega_{1/0} - \lambda \cdot \omega_{3/0} + (\lambda - 1)\omega_{4/0} = 0 \\ \lambda = \frac{\omega_{1/0}}{\omega_{3/0}} \Big|_{\omega_{4/0}=0} = \frac{-Z_3}{Z_{2b}} \cdot \frac{-Z_{2a}}{Z_1} \end{cases}$$

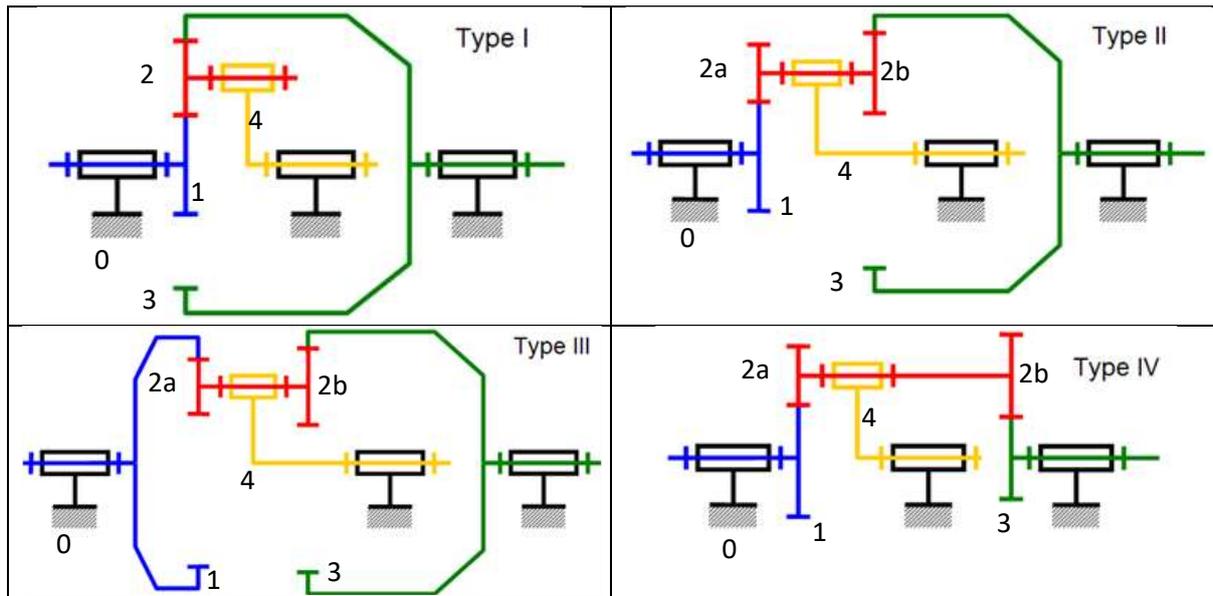
2. la configuration utilisée est $\omega_{3/0} = 0$, la relation de Willis peut alors s'écrire : $\omega_{1/0} + (\lambda - 1)\omega_{4/0} = 0$

Ce qui donne : $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{-Z_3 \cdot -Z_{2a}}{Z_{2b} \cdot Z_1}} = \frac{Z_{2b} \cdot Z_1}{Z_{2b} \cdot Z_1 - Z_3 \cdot Z_{2a}}$



6.3 Conditions géométriques de fonctionnement

Pour réaliser un train épicycloïdal, quatre architectures peuvent être proposer. Elles sont communément appelées Type I, II, III et IV :



Les conditions géométriques indispensables au montage et au fonctionnement d'un train épicycloïdal impliquent des relations entre les diamètres (ou rayons) primitifs des différentes roues dentées. Ces conditions dépendent aussi de l'architecture étudiée.

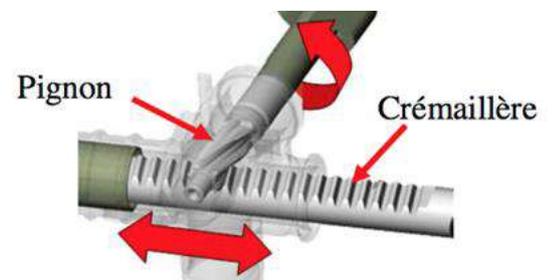
Dans la plupart des cas, le module est le même au niveau des différentes roues dentées. Cela n'est pas obligatoire pour les architectures Type II, III et IV puisque les deux planétaires ne sont pas concentriques. Dans ce cours, nous traiterons uniquement le cas où les modules sont égaux afin de simplifier les équations. Nous avons alors les relations suivantes pour les quatre architectures :

<p>Type I :</p> $D_3 = D_1 + 2 \cdot D_2 \rightarrow Z_3 = Z_1 + 2 \cdot Z_2$	<p>Type II :</p> $R_1 + R_{2a} = R_3 - R_{2b} \rightarrow Z_1 + Z_{2a} = Z_3 - Z_{2b}$
<p>Type III :</p> $R_1 - R_{2a} = R_3 - R_{2b} \rightarrow Z_1 - Z_{2a} = Z_3 - Z_{2b}$	<p>Type IV :</p> $R_1 + R_{2a} = R_3 + R_{2b} \rightarrow Z_1 + Z_{2a} = Z_3 + Z_{2b}$

7. Lois entrée-sortie des transformateurs de mouvement

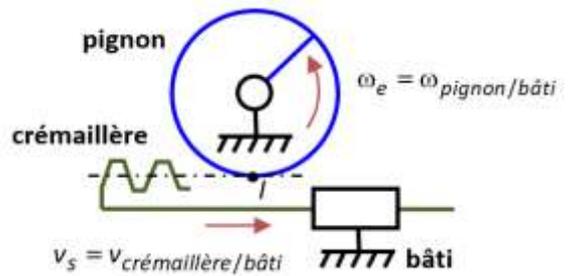
7.1 Transformateurs de mouvements non filetés

Les transformateurs de mouvements non filetés que nous verrons dans ce cours sont les systèmes : **pignon-crémaillère**, **pignons-chaîne**, **poulies-courroie**, **cylindre roulant sans glissement**. Ces transformateurs réalisent une **transformation de puissance de façon réversible**



avec : ω_e la vitesse angulaire du pignon par rapport au bâti ; C_e le couple (effort « tournant ») appliqué sur le pignon ; V_s la vitesse de translation de la crémaillère par rapport au bâti et F_s l'effort appliqué sur la crémaillère.

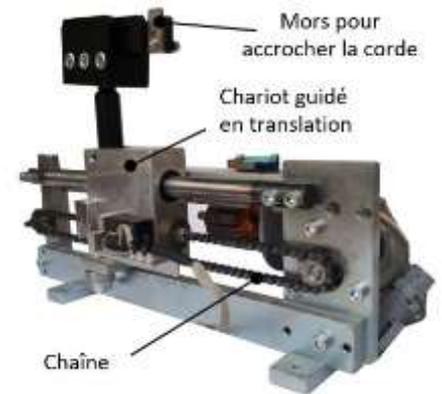
Les transmetteurs pignon-crémaillère assure le roulement sans glissement du cercle primitif du pignon sur la ligne de référence de la crémaillère au point I :

$$\vec{V}_{I \in \text{pignon}/\text{crémaillère}} = \vec{0}.$$


La loi entrée-sortie cinématique est :

$$\begin{cases} 2\pi \text{ (rad)} \rightarrow 2\pi R \text{ (m)} \\ |\theta| \text{ (rad)} \rightarrow |x| \text{ (m)} \end{cases} \rightarrow |x| = \frac{2\pi R}{2\pi} |\theta| \rightarrow |V_s| = R |\omega_e|$$

Remarque 1 : Les dispositifs **poulies-courroie** ou **pignons-chaîne** peuvent être également utilisés comme transformateur de mouvement. Dans ce cas, les 2 poulies ou les 2 pignons ont **même diamètre**. Ils se comportent alors **cinématiquement comme des transmetteurs pignon-crémaillère**. Exemple : cordeuse de raquette.



Remarque 2 : Tout **cylindre « roulant » sans glissement** sur un plan se comporte **cinématiquement comme un transmetteur pignon-crémaillère**. Exemple type : une roue.



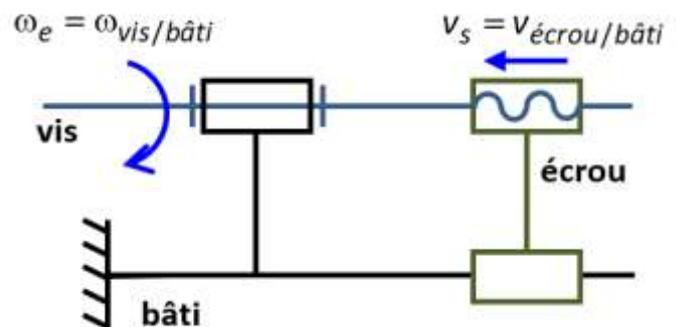
7.2 Transformateurs de mouvements filetés : système vis-écrou



- avec : - ω_e la vitesse angulaire de la vis par rapport au bâti ;
- C_e le couple (effort « tournant ») appliqué sur la vis ;
- V_s la vitesse de translation de l'écrou par rapport au bâti
- F_s l'effort appliqué sur l'écrou.

Ce transmetteur permet de **transmettre des efforts importants avec une bonne précision**. L'entrée est généralement la rotation de la vis, la sortie la translation de l'écrou. Si la vis motorisée est guidée en rotation par rapport au bâti, et l'écrou en translation, ce transmetteur réalise une **transformation de puissance de façon irréversible en fonction du pas de vis**.

Le modèle cinématique d'un transmetteur vis-écrou est donné ci-contre. On peut remarquer une nouvelle liaison dite **hélicoïdale** entre la vis et l'écrou. Cette liaison modélise la possibilité d'un mouvement combiné de rotation et translation suivant le même axe/direction.

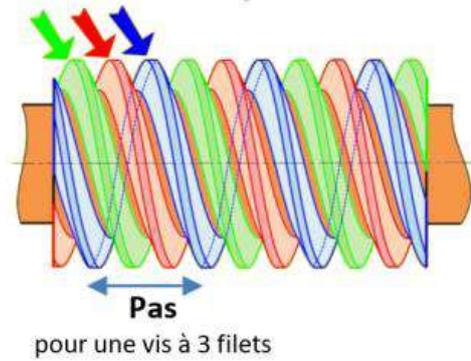


La loi entrée-sortie cinématique est :

$$\begin{cases} 2\pi \text{ (rad)} \rightarrow pas \text{ (m)} \\ |\theta| \text{ (rad)} \rightarrow |x| \text{ (m)} \end{cases} \rightarrow |x| = \frac{pas}{2\pi} |\theta| \rightarrow |V_s| = \frac{pas}{2\pi} |\omega_e|$$

avec ω_e en rad/s, V_s en m/s (ou mm/s) et pas en m (ou mm).

Le pas est la distance linéaire parcourue par l'écrou par rapport à la vis lorsque la vis tourne d'un tour par rapport à l'écrou (le pas est le même pour la vis et l'écrou).



Sources

J. Le Goff, S. Génouel, « Cours de Sciences Industrielles de l'Ingénieur CPGE 1^{ère} année », Pôle Chateaubriand Joliot-Curie, 2013