PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Libre Obligatoire n°1
Algèbre
à rendre le vendredi 3 Septembre 2021 à Mme ZAROUF

Dans ce devoir, il s'agit de revoir la partie Algèbre de PCSI et en particulier de vérifier les compétences suivantes :

- *Se rappeler les principaux espaces vectoriels, ceux qu'on appelle espaces vectoriels de référence.*
- *Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel en montrant qu'il est sous espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.*
- *Montrer qu'un ensemble est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel.*
- *L'espace vectoriel des polynômes.*
- *Maîtriser la notion de dimension finie d'un espace vectoriel.*
- *La définition de vect.*
- *Déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.*
- *Montrer que deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sont supplémentaires dans E soit en utilisant les dimensions si c'est possible soit en faisant une méthode par analyse-synthèse.*
- *Montrer qu'une application est linéaire, trouver son noyau, son image. Lien avec l'injectivité, la surjectivité.*
- *la notion d'endomorphisme et d'isomorphisme.*
- *Appliquer le théorème du rang.*
- *Lorsque nous sommes en dimension finie, savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans les bases choisies.*
- *Changement de bases, matrice de passage....*
- *Déterminer un noyau puis en déduire l'image en utilisant la matrice.*
- *Les déterminants : calcul et leur utilité (montrer qu'une famille de vecteurs est une base, qu'une matrice est inversible ou non, montrer qu'un endomorphisme est bijectif ou non)*

En conséquence, vous devez dans un premier temps relire attentivement les chapitres concernés puis les avoir avec vous lorsque vous cherchez ce devoir de façon à retrouver les méthodes grâce aux exemples du cours ou exercices de votre feuille de TD vous aidant à répondre aux questions.
Je mets l'exercice 4 facultatif. Ceci étant, ceux qui visent les concours Centrale ou Mines ont tout intérêt à le faire.
Le temps estimé pour ce devoir est quatre heures.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$, on définit les parties suivantes :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y + 2z + t = 0\}$$

$$G = \text{ vect } [(u, v, w)] \text{ où } u = (1, 0, 0, 0),\ v = (0, 1, 0, 0),\ w = (1, -1, 0, 0)$$

1. Démontrer que F et G sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. (a) Démontrer que : $F + G = \mathbb{R}^4$.
   (b) En déduire $\dim(F \cap G)$ puis une base de $F \cap G$
   (c) A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^4$?

3. Construire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.
4. Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (z,t) \end{array}$$

   (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) On munit $\mathbb{R}^4$ puis $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques respectives. Soit A la matrice de φ. Quel est son nombre de lignes ? son nombre de colonnes ? Expliciter A.
   (c) Montrer que $\mathrm{K}er(\varphi) = G$.
   (d) En déduire que φ est surjective.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère la base canonique $\mathcal{B}_1$, et la famille suivante :

$$\mathcal{B}_2 = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$$

1. Montrer par deux manières dont une utilise un déterminant, que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Justifier que $f(P) = (1-X)^2P'' - 2XP'$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Donner $A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f), A_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f), B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(f)$.
4. Quelle relation relie A_1 et A_2 ? A_1 et B ?
5. Déterminer $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$. *c'est-à-dire donner une base*

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par E_n l'espace des polynômes à coefficients réels de degrés inférieurs ou égaux à n.

1. On pose $H = \{P \in E / P(0) = 0\}$.
   (a) Justifier que H est un sous espace vectoriel de E.
   (b) Etablir que H et E_0 sont supplémentaires dans E.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur E_n l'application f_n par :

$$\forall P \in E_n, f_n(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

   (a) Montrer que f_n est un endomorphisme de E_n.
   (b) Montrer que $\ker f_n = E_0$ et $\mathrm{Im}\, f_n = E_{n-1}$.
   (c) Donner la matrice de f_3 dans la base canonique de E_3.

3. On définit

$$f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

   Montrer que f est un isomorphisme.
4. Trouver $P \in E$ tel que : $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = X^3$.

Exercice 4. 1. Pour f continue sur $[a,b]$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c)$$

On pourra écrire $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide d'une primitive F (dont on justifiera l'existence) de f et utiliser un théorème classique utilisant les fonctions dérivables

2. Soit f continue sur $\mathbb{R}$. On pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   Montrer que g admet $f(0)$ comme limite en 0.

3. On pose $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (a) Justifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) On définit une application Φ sur E par : $\forall f \in E, \Phi(f) = g$ où

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

   (c) Donner l'image par Φ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
   (d) Montrer que $g \in E$ et que g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. Déterminer g'.
   (e) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
   (f) Déterminer le noyau de Φ.
   (g) Φ est-elle injective ? surjective ?
   (h) Déterminer les réels λ tels qu'il existe $f \in E$ non nulle telle que $\Phi(f) = \lambda f$.