CPGE
Brizeux
Quimper

Quimper, le 17 août 2021.
Année scolaire 2021-22

DLPSIAn01

Devoir non surveillé de mathématique (analyse)

PSI - (Deuxième année)

ATTENTION : Afin de mener à bien le problème ci-dessous, il est important que vous vous refamiliarisez avec les équivalents, les développements limités et asymptotiques, les notions de « petit o » et de « grand O », les sommations $\sum$, les séries, notamment les sommes de Riemann ainsi les intégrales et leur comparaison avec une série, la décomposition en éléments simples. La **Partie III** est facultative.

☞ **Les copies d'analyse seront toujours rendues séparément de celles d'algèbre.**

Autour d'une approximation de la constante d'Euler-Mascheroni.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

Partie préliminaire

Établir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ supérieur à 1, on a $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
En déduire un encadrement de H_n à l'aide de deux intégrales, puis que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Partie I

I.1. Déterminer, lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ de la forme $\frac{C}{n^\alpha}$ où C est une constante.

I.2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
On posera $\gamma = \lim_{n\to+\infty} u_n$. *Il s'agit de la constante d'Euler-Mascheroni.*

I.3. **a.** Prouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}.$$

b. Étudier sur l'intervalle $[k; k+1]$ (où $k \in \mathbb{N}^*$), le signe de la fonction f_k définie par :

$$f_k(x) = \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)(x-k) - \frac{1}{x}.$$

En déduire l'encadrement :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right).$$

I.4. Prouver que $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Partie II

II.1. On définit les fonctions φ_1 et φ_2 sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2} \text{ et } \varphi_2(x) = \varphi_1(x) + \frac{2}{3x^3}.$$

II.2. Étudier les variations de ces deux fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire leur signe.

II.3. Soit $n \geqslant 2$.

a. Donner un encadrement, fonction très simple de n, pour le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, puis un majorant de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ *(on pourra utiliser une comparaison avec une intégrale).*

b. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, les inégalités :

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{3(n-1)^2} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$

II.4. Donner une valeur de l'entier n telle que l'encadrement précédent permette, à partir de u_n, d'obtenir une approximation de γ à 10^{-2}-près. Puis encadrer effectivement par ce procédé la constante γ à 10^{-2}-près *(la réponse à cette question pourra prendre la forme d'un petit programme en Python ou bien d'une démarche sur calculatrice).*

Partie III ***(Facultatif, pour les plus téméraires.)***

III.1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

III.2. Trouver trois réels a, b et c tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$ puis la valeur de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

III.3. Déterminer des réels λ et μ, de telle sorte que le développement asymptotique, lorsque n tend vers $+\infty$, de

$$w_n = u_n - u_{n+1} - \frac{\lambda}{n(n+1)} - \frac{\mu}{n(n+1)(n+2)}$$

selon les puissances de $\dfrac{1}{n}$ ait son premier terme non nul d'ordre le plus élevé possible et donner la valeur $\dfrac{D}{n^\beta}$ de ce premier terme.

III.4. Justifier que pour tout $n > 1$:

$$\frac{1}{\beta-1}\left[\frac{1}{n^{\beta-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\beta-1}}\right] \leqslant \frac{1}{n^\beta} \leqslant \frac{1}{\beta-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{\beta-1}} - \frac{1}{n^{\beta-1}}\right]$$

et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\beta-1)\,n^{\beta-1}}$.

III.5. **a.** ***Un résultat intermédiaire :***

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes **positifs**. On suppose que la série de terme général y_n converge.

i. On suppose que l'on ait $x_n \underset{n\to+\infty}{=} o(y_n)$. Montrer que la série $\sum x_n$ converge, et que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} x_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} y_k\right)$.

ii. on suppose maintenant que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$. Montrer que l'on a également $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} y_k$.

b. Déduire de la question précédente un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$.

c. En déduire un terme correctif v_n tel que $u_n + v_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^3}$.

d. Reprendre la valeur calculée en **II.4** pour u_n et lui ajouter le terme correctif v_n pour la valeur de n correspondante. Quelle est la valeur approchée de γ ainsi obtenue ?

Un logiciel de calcul formel (Maxima ou Maple™ par exemple) donne les premières décimales de la constante d'Euler-Mascheroni $\gamma \approx 0,577215664901533$. Qu'observe-t-on en gain de précision ?

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆