**Devoir Libre Obligatoire n°2**
**MATHEMATIQUES Algèbre**
**PSI**
**à rendre le vendredi 1er Octobre 2021 à Mme ZAROUF**

# Exercice I

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$,
et $B = \left\{1, X, X^2 ..., X^n\right\}$ sa base canonique.
Etant donnée une famille de $(n+1)$ réels distincts $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$ , on lui associe
les polynômes $L_0, L_1, L_2 ... L_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que :
$\forall i \in \{0, 1, 2, ..n\}, \forall j \in \{0, 1, 2, ..n\} \setminus \{i\}, \quad L_i(a_j) = 0$ et $L_i(a_i) = 1$
On note enfin $A$ la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées dans la base $B$ des vecteurs $L_0, L_1, L_2, ... L_n$ .

1. On prend $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$ .
   (a) Donner $L_0, L_1, L_2$
   Montrer que $\{L_0, L_1, L_2\}$ est une base de $\mathcal{R}_2[X]$ .
   Montrer que, pour polynôme $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on a $P = P(0)L_0 + P(1)L_1 + P(2)L_2$.
   (b) Former la matrice de changement de base de $B = \left\{1, X, X^2\right\}$ à $B' = \{L_0, L_1, L_2\}$. Justifier que $A$ est cette matrice.
   (c) Le but de cette question est de déterminer les polynômes $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :
   $$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$$
   Soit $P$ un tel polynôme.
      i. Donner la matrice colonne $T$ donnant les coordonnées de $P$ dans $B$.
      ii. Donner la matrice colonne $T'$ donnant les coordonnées de $P$ dans $B'$.
      iii. Chercher dans votre cours de PCSI la relation matricielle qui existe entre $T$, $T'$ et $A$.
      iv. En déduire l'ensemble des solutions $S$ des polynômes $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.
      v. Montrer que $S$ est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension finie. En déterminer une base.
2. Retour au cas général
   (a) Montrer que $B' = \{L_0, L_1, L_2 .. L_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ .
   Indiquer les coordonnées dans la base $B'$ d'un polynôme $P$ quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ .
   (b) – Quel est le nombre de lignes et de colonnes de $A$ ?
   – Montrer que $A$ est inversible.
   – Calculer son inverse. Comment s'appelle cette matrice ? Donner son déterminant.
   (c) Montrer que $\sum\limits_{i=0}^{n} L_i = 1$.
   En déduire que la somme des éléments de la première ligne de $A$ est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre ligne de $A$ est nulle.

# Exercice II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Soit $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$[\![1, n]\!]$ désigne l'intervalle des entiers naturels compris entre 1 et $n$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $AE_{ij}$ et $E_{i,j}A$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
2. En déduire $E_{ij}E_{kl}$ pour $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$.
3. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ linéaire vérifiant : $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, f(AB) = f(BA)$.
   (a) Montrer que l'application trace vérifie cette condition. *Savoir refaire la démonstration rigoureuse du cours sans regarder le cours !!*

   Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ linéaire vérifiant la condition de l'énoncé.
   (b) Montrer que : $\forall i \in [1, n], f(E_{ii}) = f(E_{11})$.
   (c) Montrer que : $\forall (i, j) \in [1, n]^2, i \neq j \Longrightarrow f(E_{ij}) = 0$.
   (d) En déduire que $f$ est colinéaire à la trace. (c-a-d qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), f(A) = \lambda tr(A)$).