Exercice n°2 : Température à l'intérieur de la Terre

La Terre est assimilée à une sphère homogène de rayon $R = 6\,370$ km et de masse volumique $\rho = 2\,800$ kg.m^{-3}.

Le température à l'intérieur de la Terre est une fonction de $r = OM$ distance entre le point d'étude M et la centre de la Terre O ; elle est notée $T(r)$ et décroît en fonction de r. La température à la surface de la Terre est $T_0 = 290$ K.

On suppose que le régime permanent de refroidissement de la Terre est atteint.

La conduction est le seul mode de transfert thermique envisagé et la conductivité thermique de la Terre, $\lambda = 4$ W.m^{-1}.K^{-1}, est supposée uniforme.

Dans cette modélisation simplifiée, on définit deux zones :

– du centre de la Terre jusqu'à la limite de la lithosphère en $r_m = 6\,280$ km soit pour $0 \le r \le r_m$, il n'y a aucune source de production de « chaleur ».

– pour l'ensemble de la lithosphère (d'une épaisseur de 90 km), soit pour $r_m \le r \le R$, on tient compte de la source de chaleur que constitue la radioactivité d'éléments, essentiellement l'uranium. Ces sources radioactives dégagent, dans la lithosphère, une puissance thermique par unité de masse notée $H = 5.10^{-10}$ W.kg^{-1} supposée constante et uniforme.

a) Calculer le flux thermique Φ à travers une sphère de rayon r tel que $0 \le r \le r_m$; quelle propriété possède ce flux ? En déduire le profil de température $T(r)$ dans cette zone en fonction de deux constantes A et B. Quelle condition aux limites permet de déterminer la valeur de l'une d'entre elles ? Quelle est la signification de l'autre ? Commenter les résultats $j_{th}(r)$ et $T(r)$ obtenus dans cette zone.

On note $T(r = 0) = T_C$ la température au centre.

b) Pour l'étude de la lithosphère ($r_m \le r \le R$), procéder à un bilan d'énergie et établir l'équation de diffusion en coordonnées cartésiennes à une dimension avec $T(x)$. On admet que la structure de cette équation reste inchangée en coordonnées sphériques en remplaçant le laplacien par $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\right)$.

c) Déduire de l'équation précédente l'évolution de la température dans la lithosphère en fonction de r, de différents paramètres, et de deux constantes d'intégration C et D.

d) Quelles conditions aux limites doit-on appliquer à la lithosphère ? En déduire C et D en fonction de T_0, R, r_m, ρ, H et λ, puis donner, pour la lithosphère, l'expression de la température en fonction de r.

e) Tracer sommairement la fonction $T(r)$ dans la Terre, puis calculer numériquement la température T_C au centre de la Terre ainsi que le gradient de température dT/dr en K.km^{-1} à la surface de la Terre.

f) Exprimer le flux thermique total Φ en surface de la Terre en fonction de la puissance radioactive dissipée P_d ; commenter ce résultat et faire l'application numérique.

Exercice n°3 : Statique des fluides incompressibles (extrait CCP 2014)

On considère un fluide incompressible, de masse volumique μ, au repos dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ (de norme g). Les hauteurs sont rapportées à un axe vertical (Oz) dirigé vers le haut.

- I.1.1

Donner l'équation différentielle liant la pression dans le fluide P, μ, et g (équation de l'hydrostatique).

- **I.1.2**

  Donner l'expression de la fonction $P(z)$, pression fonction de la hauteur, solution de l'équation précédente, en prenant comme constante d'intégration $P(0) = P_0$.

- **I.1.3**

  Enoncer le théorème d'Archimède pour un corps solide quelconque totalement immergé dans le fluide représenté sur la **figure I.1**.

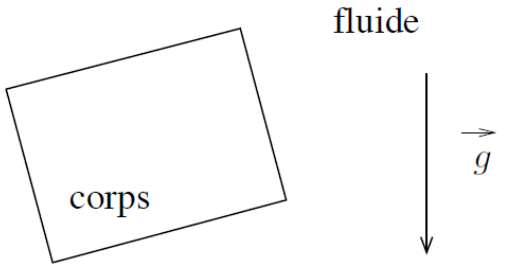

Figure I.1 Parallélépipède rectangle plongé dans un fluide

Recopier sommairement la **figure I.1** et y représenter graphiquement la résultante des forces de pression exercées sur un objet de forme parallélépipède rectangle homogène, représenté vu de profil sur la figure.

Les forces de pression exercent-elles un couple de torsion sur l'objet ?

- **I.2.1**

  L'air est assimilé à un fluide compressible, obéissant à l'équation des gaz parfaits, dont la température est uniforme et constante, indépendante de la hauteur z.

  Donner la relation existant entre la masse molaire $\mathcal{A}$, la masse volumique μ, la pression P, la température T et la constante des gaz parfaits.

- **I.2.2**

  Montrer que, dans ce cas, la solution de l'équation obtenue à la question **I.1.1** est de la forme :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

  où H est une longueur que l'on exprimera en fonction de $\mathcal{A}$, R, T et g, puis que l'on calculera numériquement pour $T = 280$ K.

- **I.2.3**

  Quelle valeur de la pression ce modèle prédit-il au sommet du Puy de Dôme, d'altitude $z_P = 1\,465$ m, lorsque $T = 280$ K et $P_0 = 1\,013$ hPa ?

- **I.2.5**

  Déduire, du profil de pression $P(z)$, l'expression de la masse volumique $\mu(z)$ en fonction de la hauteur. En supposant que l'on puisse négliger la courbure de la Terre, calculer la masse totale de gaz occupant une colonne semi-infinie, de section horizontale $a = 1$ m^2, s'étendant de la hauteur $z = 0$ jusqu'à l'infini.

  Montrer que cette masse s'exprime simplement en fonction de P_0, de a et de g supposé constant et uniforme.

  Ce résultat est-il surprenant ?

- **I.2.6**

  Déduire de la question précédente une estimation numérique de la masse totale de l'atmosphère de la Terre.