DS n°6 - Mathématiques PCSI

Samedi 18 mars 2017

Durée : 4h.

Tout matériel éléctronique est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les quatre problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 (Question de cours).

1. Donner la définition de l'indépendance de deux événements puis une caractérisation. Donner enfin la définition d'événements mutuellement indépendants.
2. Montrer que si deux événements sont indépendants, alors leur événements contraires sont indépendants.
3. Énoncer puis démontrer la seconde formule de Bayes.

Problème 1 : Polynômes interpolateurs (adapté Agro 2001)

On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$L_1(X) = \frac{1}{2}(X^2 - X), \quad L_2(X) = 1 - X^2, \quad \text{et} \quad L_3(X) = \frac{1}{2}(X^2 + X).$$

1. Déterminer les racines et le degré de L_1, L_2 et L_3.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels.

2. Montrer que $P(-1)L_1(X) + P(0)L_2(X) + P(1)L_3(X) \in \mathbb{R}_2[X]$.
3. On pose $Q(X) = P(X) - [P(-1)L_1(X) + P(0)L_2(X) + P(1)L_3(X)]$. Quel est au plus le degré de Q ? Montrer que -1, 0 et 1 sont racines de Q.
4. En déduire que Q est nul puis que :

$$P(X) = P(-1)L_1(X) + P(0)L_2(X) + P(1)L_3(X)$$

5. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(-1) = P(1) = 0$ et $P(0) = 2$ dont on donnera l'expression.

On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$H_1(X) = 1 - X^2, \quad H_2(X) = X - X^2, \quad \text{et} \quad H_3(X) = X^2.$$

6. En introduisant un polynôme Q, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$P(X) = P(0)H_1(X) + P'(0)H_2(X) + P(1)H_3(X).$$

7. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 1$ et $P(1) = 0$ dont on donnera l'expression.

On considère deux réels $a < b$ et les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$K_1(X) = 1 - \frac{(X-a)^2}{(b-a)^2}, \quad K_2(X) = (X-a)\left[1 - \frac{X-a}{b-a}\right], \quad \text{et} \quad K_3(X) = \frac{(X-a)^2}{(b-a)^2}.$$

8. Calculer les valeurs de K_1, K_2, K_3 en a et en b et de K_1', K_2', K_3' en a.
9. En introduisant à nouveau un polynôme Q, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,
$$P(X) = P(a)K_1(X) + P'(a)K_2(X) + P(b)K_3(X).$$
10. En déduire qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ admettant a pour racine double avec $P(b) = 1$.

Problème 2 : Polynômes de Tchebytchev (adapté école de l'Air 93)

On cherche à déterminer une suite de polynômes vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \ (1).$$

On veut ainsi généraliser les formules trigonométriques pour écrire le réel $\cos(n\theta)$ sous la forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$. On appelle de tels polynômes les polynômes de Tchebytchev.

1. Déterminer $T_0(X)$, $T_1(X)$, $T_2(X)$, $T_3(X)$ et $T_4(X)$.
2. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)$.
3. En déduire l'unicité d'un T_n vérifiant la relation (1) et donner le degré de T_n.
4. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\mathrm{ch}(\theta)) = \mathrm{ch}(n\theta)$.
5. Calculer le coeffient dominant de T_n et étudier la parité de T_n.

Problème 3 : Endomorphismes commutants (adapté banque PT 2009)

On note E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit f un endormorphisme de E qui commute avec tous les endomorphismes de E, c'est-à-dire tel que $\forall g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f$.

1. Soit $u \in E \setminus \{0\}$. Montrer que la droite vectorielle $Vect(u)$ possède un supplémentaire dans E, que l'on notera H_u. Quelle est la dimension de H_u ?
2. Montrer qu'il existe un réel $\lambda_u \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda_u \cdot u$. (Pour cela, on utilisera le projecteur p_u sur $Vect(u)$ parallèlement à H_u, et le fait qu'il commute avec f).
3. Soit $v \in E$ non colinéaire au vecteur u. On note λ_v le réel tel que $f(v) = \lambda_v \cdot v$ défini de la même manière qu'à la question 2. Montrer que $\lambda_u = \lambda_v$.
4. Reprendre la question précédente lorsque v est non nul et colinéaire au vecteur u.
5. En déduire quels sont les endormorphismes de E qui commutent avec tous les endormorphismes de E.

Problème 4 : Sous-espace cyclique (adapté banque PT 2015)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} & x_0 = x \\ \forall n \geqslant 0 & x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

et on note $E_x = Vect(x_n, n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que E_x est stable par f.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.
3. Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ soit une famille libre.
   (a) Justifier l'existence d'un tel entier p.
   (b) Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que
   $$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i.$$
   (c) On note $E'_x = Vect(x_0, \ldots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.
   (d) En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathscr{B}_p = (x_0, \ldots, x_{p-1})$ est une base de E_x.
4. On note $\hat{f}$ l'endomorphisme de E_x obtenu comme restriction de f à E_x. On note $\hat{f}^k = \hat{f} \circ \hat{f} \circ \cdots \circ \hat{f}$ l'endormorphisme $\hat{f}$ composé k fois Montrer que la famille $(\mathrm{Id}, \hat{f}, \hat{f}^2, \ldots, \hat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E_x)$.
5. (a) Montrer que pour tout $k < p$,
   $$\hat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \hat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1} \hat{f}^{p-1}(x_k).$$
   (b) En déduire que l'on a
   $$\hat{f}^p - a_{p-1}\hat{f}^{p-1} - \cdots - a_0 \mathrm{Id} = 0.$$