DS n° I Mathématiques

Durée : 3h. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet et des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.

Toute affirmation doit être justifiée. Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

Sujet e3a-Polytech/CCINP

Exercice 1 *Questions de cours*

1. Etant donnée une fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, rappeler la formule permettant de calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ comme une limite pour $N \to +\infty$ de sommes de Riemann.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, portant sur le paramètre réel α. On ne demande pas d'autre justification que le nom de ce type d'intégrales généralisées, aucun calcul.
3. Donner l'expression de A une primitive sur $\mathbb{R}$ de $a : t \longmapsto \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Exercice 2

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^{3/2}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

on fera apparaître clairement toutes les étapes du raisonnements et on donnera des justifications complètes et précises.

Exercice 3

Soient a, b deux paramètres réels.

Donner en fonction des paramètres réels a et b la nature de l'intégrale $J_{a,b} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{at}}{1+\mathrm{e}^{bt}}\ \mathrm{d}t$

Exercice 4

Donner la nature de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\ \frac{\cos(t^2)}{\mathrm{e}^{t^2}}\ \mathrm{d}t$

En cas de convergence, calculer sa valeur.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1. En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.
   (a) Prouver que l'on a : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2$, $0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \dfrac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$
   (b) En déduire que l'on a, pour tous entiers naturels k et n :
   $$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$
   (c) En utilisant sa monotonie, montrer que la suite (v_n) converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. On pose alors pour tout entier naturel n : $t_n = \mathrm{e}^{2^n L}$. Démontrer que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$.
4. On pose alors pour tout entier naturel n : $s_n = t_n - u_n$.
   (a) Trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.
   (b) Prouver que la suite (s_n) est bornée.
   (c) Montrer qu'il existe un réel b tel que l'on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} t_n + b + o(1)$

Exercice 6

On rappelle que les fonctions trigonométriques hyperboliques ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t\in\mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. (a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.
   (b) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables, et que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$ et $\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t$.
   (c) Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\operatorname{ch} t)^2 - (\operatorname{sh} t)^2$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\operatorname{ch} t)^2$ et $(\operatorname{sh} t)^2$.
2. Tracer les tableaux de variations des fonctions ch et sh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de ch et sh en 0.
3. (a) En se basant sur les variations de sh, montrer que l'équation $\operatorname{sh} t = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.
   (b) On pose $z = \mathrm{e}^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.
   (c) En déduire la valeur exacte de α.
   (d) Montrer que $0 \leq \alpha \leq 1$.
4. Montrer que :
$$\operatorname{ch}(\alpha) = \sqrt{2}.$$

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\operatorname{sh} t)^{2n}\, dt$.

1. Montrer que $I_0 = \alpha$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive (*indication : on pourra remarquer que pour tout* $t \in [0, \alpha]$, *on a* $0 \leq \operatorname{sh} t \leq 1$). En déduire qu'elle est convergente.
3. (a) En remarquant que $(\operatorname{sh} t)^{2n+2} = (\operatorname{sh} t)^{2n+1} \operatorname{sh} t$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$I_{n+1} = \operatorname{ch}(\alpha) - (2n+1)(I_{n+1} + I_n).$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$
   (c) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie C – Algorithmique

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

1. On souhaite obtenir un encadrement du réel α, solution de l'équation $\operatorname{sh}(\alpha) - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Python* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie deux réels a et b vérifiant $a \leq \alpha \leq b$ et $b - a \leq \varepsilon$.

```
import numpy as np

def dicho(eps):
  a = ...
  b = ...
  while abs(b-a)> eps:
    c = (a+b)/2
    if ...
      a = c
    else:
      b = c
  return([a,b])
```

   Note : la fonction sh *s'écrit* `np.sinh()` *en Python, en important la bibliothèque* `import numpy as np`

2. En utilisant la fonction précédente sur machine, on trouve $0,881$ comme valeur approchée de α. On rappelle de plus que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie
$$I_0 = \alpha, \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$
   Écrire une fonction, en *Python* qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie une valeur approchée de I_n.