**Durée : 4h.** Le barème tiendra compte de la longueur du sujet et des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.

Les calculatrices sont **interdites**

**Tout résultat doit être encadré voire souligné**

# • Sujet A : vous préparez essentiellement e3a et CCP

## Exercice 1 *Questions de cours ou applications directes*

*Dans cet exercice uniquement, on ne demande pas de démonstration.*

1. Etant donnée une fonction continue $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives, rappeler une condition nécessaire de convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de $\displaystyle\int_0^1 t^a \mathrm{d}t$, portant sur le paramètre réel $a$. : *On ne demande pas d'autre justification que le nom de ce type d'intégrales généralisées.*
3. Donner l'expression de $A$ une primitive sur $\mathbb{R}$ de $a : t \longmapsto \dfrac{2t}{1+t^4}$.

*Dans toute la suite du devoir, on demande des justifications précises de toutes vos affirmations, en vous appuyant sur le vocabulaire, les notations et les propriétés du cours.*

## Exercice 2

La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^{3/2}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$ ?

## Exercice 3

Soient $a, b$ deux paramètres réels.

Donner en fonction des paramètres réels $a$ et $b$ la nature de l'intégrale $J_{a,b} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{at}}{1+\mathrm{e}^{bt}}\ \mathrm{d}t$

## Exercice 4

Donner la nature de l'intégrale généralisée $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\ \frac{\cos(t^2)}{\mathrm{e}^{t^2}}\ \mathrm{d}t$

En cas de convergence, calculer sa valeur.

**Exercice 5**

## Définitions

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que $P$ vérifie la propriété $(\mathcal{S})$ si :
« pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda) < 0$. »

Soient $a$ et $b$ deux réels. On note $P(X) = X^2 + aX + b$ et $\Delta = a^2 - 4b$.

On note $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes tels que : $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)$.

1. Montrer que $a = -(z_1 + z_2)$ et $b = z_1 z_2$.
2. On suppose dans cette question que $\Delta > 0$.
   (a) Vérifier que si $P$ vérifie la propriété $(\mathcal{S})$, alors $a > 0$ et $b > 0$.
   (b) Montrer réciproquement que si $a > 0$ et $b > 0$, alors $P$ vérifie la propriété $(\mathcal{S})$.
3. On suppose dans cette question que $\Delta = 0$.
   Montrer que $P$ vérifie la propriété $(\mathcal{S})$ si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.
4. On suppose dans cette question que $\Delta < 0$.
   (a) Justifier que $z_2 = \overline{z_1}$.
   (b) Montrer que $P$ vérifie la propriété $(\mathcal{S})$ si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.
5. On pose $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$.
   (a) Trouver les racines complexes de $Q$.
   (b) Montrer que $Q$ ne vérifie pas la propriété $(\mathcal{S})$.

**Exercice 6**

Soient $\lambda$ et $\mu$ deux réels, $\mu \neq 0$, tels que : $\lambda^2 - \mu < 0$. Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu)^{n+1}}$$

1. Montrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$, que l'on exprimera en fonction de $\lambda$ et $\mu$, tels que, pour tout réel $x$ :
$$x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu = \alpha\left(1 + \beta^2\,(x + \lambda)^2\right).$$
2. Pour tout entier naturel $n$, étudier la convergence de $K_n$. Que vaut $K_0$ ?
3. On se place, dans ce qui suit, dans le cas $\lambda = 0$, $\mu = 1$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$ : $K_n = \dfrac{(2n-1)\,K_{n-1}}{2n}$.
   (On pourra intégrer par parties.)
   (b) Pour tout entier naturel $n$, exprimer $K_n$ en fonction de $n$ (on donnera la réponse à l'aide de factorielles).

**Problème 1**

# I. Préambule

On considère deux réels $a$ et $b$ tels que $a < b$, et une fonction $f$, de classe $C^1$ sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive $M$ telle que, pour tout réel $t$ de $[a, b]$ :

$$|f'(t)| \leq M.$$

2. Que vaut : $\displaystyle\lim_{k \to +\infty,\, k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} \int_a^b f'(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t} \mathrm{d}t$ ?

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty,\, k \in \mathbb{N}} \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t} \mathrm{d}t = 0.$$

# II. Intégrale semi-convergente

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t} \mathrm{d}t \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\,n\,t)}{t} \mathrm{d}t.$$

1. (a) i. Déterminer :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t}.$$

ii. Déterminer :

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2\,n\,t)}{\tan t}.$$

iii. Étudier, pour tout entier naturel non nul $n$, la convergence de l'intégrale $I_n$.

(b) Que vaut $I_1$ ?

(c) Exprimer, pour tout réel $t$ de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul $n$, la quantité :

$$\sin((2\,n+2)\,t) - \sin(2\,n\,t)$$

en fonction de $\cos((2\,n+1)\,t)$ et $\sin t$.

(d) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).

2. Étudier la convergence des intégrales $J_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

3. Montrer que la fonction $\varphi$ qui, à tout réel $t$ de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, associe

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$

est prolongeable en une fonction $\widetilde{\varphi}$ de classe $C^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Que vaut : $\lim\limits_{n \to +\infty} \{J_n - I_n\}$ ? On pensera à utiliser le préambule.

5. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est convergente (on pourra effectuer une intégration par parties).

   (b) Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

   (on pourra utiliser un changement de variable).

   (c) Que vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad ?$$