Durée : 4h. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet et des points seront attribués pour la présentation des copies ainsi que la qualité des rédactions.

Les calculatrices sont **interdites**

Tout résultat doit être encadré voire souligné

• Sujet B vous préparez essentiellement Mines et Centrale

Exercice 1 *NORME SUBORDONNÉE ET MESURE DE LOZINSKI*

Soit n un entier naturel non nul. Dans toute cette partie, on note $\|\cdot\|$ une certaine norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. On définit l'ensemble : $\mathcal{B} = \left\{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \|x\| = 1\right\}$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit : $|||A||| = \sup\limits_{x\in\mathcal{B}}(\|Ax\|)$ (l'existence de cette borne supérieure sera établie dans la question 1.c).

On admet que l'application $A \mapsto |||A|||$ définit ainsi une norme $|||\cdot|||$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui s'appelle la norme subordonnée à $\|\cdot\|$: en effet, elle dépend du choix de la norme $\|\cdot\|$.

1. (a) Rappeler la définition d'une norme sur $\mathbb{K}^n$.
   (b) Vérifier que l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.
   (c) Montrer l'existence de $x_0 \in \mathcal{B}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{B}, \|Ax\| \leq \|Ax_0\|$.
   Cela justifie donc la définition de $|||A||| = \sup\limits_{x\in\mathcal{B}}(\|Ax\|)$ et on a alors $|||A||| = \|Ax_0\|$.
   (d) Montrer que $|||I_n||| = 1$.
   (e) Établir que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\|Ax\| \leq |||A|||.\,\|x\|$.
   (f) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :
   $$|||A||| - |||B||| \leq |||A - B||| \qquad \text{et} \qquad |||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||.$$
2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a : $\mathrm{Re}\,e(\lambda) = \lim\limits_{u\to 0^+}\left(\dfrac{|1+u\lambda| - 1}{u}\right)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se propose dans cette question de montrer l'existence du réel :
   $$\mu(A) = \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{|||I_n + uA||| - 1}{u}\right)$$
   Ce réel est appelé mesure de Lozinski de A (il dépend du choix de la norme initiale).
   Pour $u > 0$, on note $\mu(A,u) = \dfrac{|||I_n + uA||| - 1}{u}$.
   (a) Montrer que pour tout u et v éléments de $\mathbb{R}_+^*$:
   $$\mu(A,u) - \mu(A,v) = |||u^{-1}I_n + A||| - |||v^{-1}I_n + A||| - (u^{-1} - v^{-1}).$$

(b) En déduire que si $0 < u \leq v$, alors $\mu(A,u) - \mu(A,v) \leq 0$.

(c) Vérifier que pour tout $u > 0$, on a : $-|||A||| \leq \mu(A,u) \leq |||A|||$.

(d) En déduire l'existence du réel $\mu(A) = \lim_{u \to 0^+} (\mu(A,u))$.

Exercice 2

Soient a, b deux paramètres réels.

Donner en fonction des paramètres réels a et b la nature de l'intégrale $J_{a,b} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{at}}{1+\mathrm{e}^{bt}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 3

Donner la nature de l'intégrale généralisée $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\frac{\cos(t^2)}{\mathrm{e}^{t^2}}\,\mathrm{d}t$

En cas de convergence, calculer sa valeur.

Exercice 4

Soient λ et μ deux réels, $\mu \neq 0$, tels que : $\lambda^2 - \mu < 0$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu)^{n+1}}$$

1. Montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on exprimera en fonction de λ et μ, tels que, pour tout réel x :

$$x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu = \alpha\left(1 + \beta^2\,(x+\lambda)^2\right).$$

2. Pour tout entier naturel n, étudier la convergence de K_n. Que vaut K_0 ?
3. On se place, dans ce qui suit, dans le cas $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $K_n = \dfrac{(2n-1)\,K_{n-1}}{2n}$.
   (On pourra intégrer par parties.)

   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer K_n en fonction de n (on donnera la réponse à l'aide de factorielles).

Problème 1 *Mines-Ponts/Centrale*

N.B.On rappelle, contrairement à l'énoncé original, la formule valable pour f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}+\int_a^x f^{(n+1)}(u)\frac{(x-u)^n}{n!}\,\mathrm{d}u$$

A) Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x)+R_n(x)$?
2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t\mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n, la relation :

$$R_n(x)=\frac{e^{nx}n^{n+1}}{n!}\int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n=\frac{n^{n+1}}{n!}y^n.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y<e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=0.$$

4. On suppose dans cette question que $x\in]0,1[$. Montrer que la fonction $u\mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M<e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x)=o(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n!=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.
6. Pour tout entier $n\geqslant 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x)=e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty}(ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u.$$

7. En déduire que, si $x>1$, alors $T_n(x)=o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n\leqslant(xe^{-x})^{n-1}ue^{-u}$ pour $u\geqslant x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x=1$, sera obtenue dans la suite du problème.

B) Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$

H2 : $f''(0) = -1$

H3 : Pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ $\quad 0 < f(x) < 1$

H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

Pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\big(f(x)\big).$$

1. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$.

   On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

2. Montrer que la fonction φ, sur $]-1,1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1,1]$, on ait

$$f(x) \leqslant e^{-ax^2}.$$

   Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

   Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. (a) Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = e^{-au^2}$.

   On notera $g : u \mapsto g(u) = e^{-au^2}$.

   (b) Justifier que g est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   (c) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n(u)| \leq g(u)$

   (d) On admet que les questions (a), (b), (c) précédentes ainsi qu'un théorème avancé -de convergence dominée- permettent de justifier l'existence pour la suite $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n\right)_n$ d'une limite égale à $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g$.

   En déduire que

$$\int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^n\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$