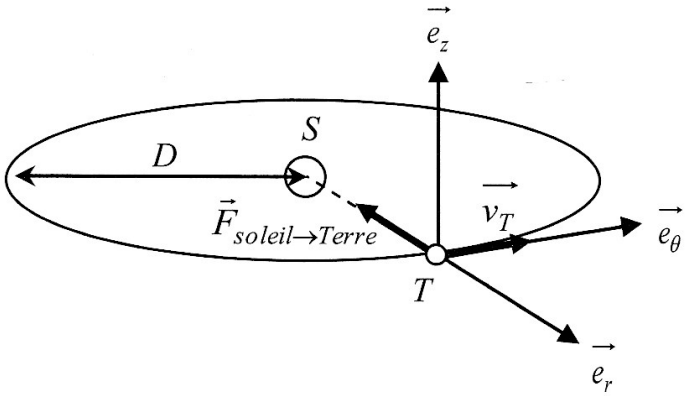
PC	Devoir surveillé n°2	Correction

Exercice n°3 : Points de Lagrange (difficile)

1) Dans le référentiel héliocentrique galiléen R_H, La Terre n'est soumise qu'à la force gravitationnelle exercée par le Soleil $\vec{F}_{soleil\to Terre} = -\dfrac{GM_S M_T}{ST^3}\overrightarrow{ST}$. Le théorème du moment cinétique appliqué à la Terre au point S dans R_H s'écrit :

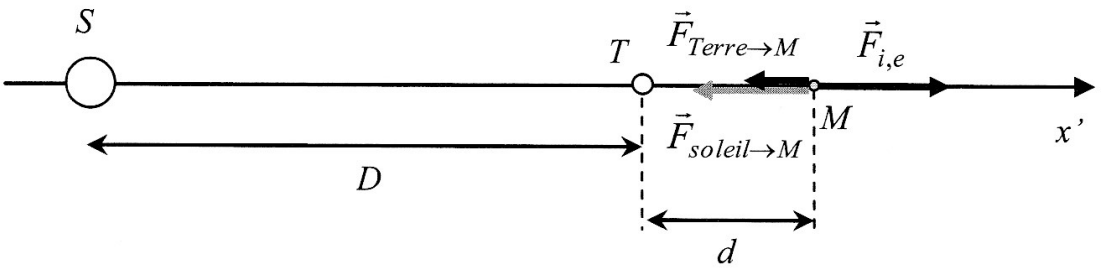
$\dfrac{d\vec{L}_{S,Terre}}{dt} = \vec{M}_{S,soleil\to Terre} = \overrightarrow{ST} \wedge \vec{F}_{soleil\to Terre} = \vec{0}$ puisque $\vec{F}_{soleil\to Terre}$ est colinéaire à $\overrightarrow{ST}$.

On en déduit que $\vec{L}_{S,Terre} = \overrightarrow{ST} \wedge M_T \overrightarrow{v_T}$ est un vecteur constant. Le mouvement de la Terre étant circulaire de rayon D, la vitesse est orthoradiale et s'écrit $\overrightarrow{v_T} = D\Omega\overrightarrow{e_\theta}$. Ainsi $\vec{L}_{S,Terre} = M_T D^2 \Omega \overrightarrow{e_z}$. Puisque D est constant, on en déduit que Ω l'est également.



La loi de la quantité de mouvement appliquée à la Terre dans le référentiel galiléen R_H s'écrit $M_T \dfrac{d\overrightarrow{v_T}}{dt} = \vec{F}_{soleil\to Terre} = -\dfrac{GM_S M_T}{D^2}\overrightarrow{e_r}$. Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon D et de vitesse angulaire Ω, $\dfrac{d\overrightarrow{v_T}}{dt} = -D\Omega^2\overrightarrow{e_r}$. On en tire $\boxed{\Omega = \sqrt{\dfrac{GM_S}{D^3}}}$.

2) On raisonne dans le référentiel R'. Par construction de R', La Terre et le Soleil sont fixes dans ce référentiel. La figure ci-dessous représente les positions du Soleil, de la Terre et du point M sur l'axe Sx'.



Le référentiel R' étant non galiléen car en rotation (uniforme autour de l'axe fixe Sz') par rapport au référentiel galiléen R_H, le point M est soumis dans R' aux forces d'inertie, en

plus des forces gravitationnelles exercées par le Soleil et la Terre. Si le point M est à l'équilibre dans R', la force d'inertie de Coriolis est nulle, il ne reste que la force d'inertie axifuge et la loi de la quantité de mouvement appliquée au point M dans le référentiel R' s'écrit :

$$m\frac{d\overrightarrow{v_M}}{dt} = \vec{0} = \vec{F}_{soleil\to M} + \vec{F}_{Terre\to M} + \vec{F}_{i,e} \qquad \text{relation (1)}$$

Le point coïncident à M, noté P, a un mouvement de rotation autour de S de rayon $D + d$ et de vitesse angulaire Ω dans R_H. On a donc $\vec{F}_{i,e} = -m\vec{a}_P = +m(D+d)\Omega^2\vec{e}_{x'}$. Le point M étant à une distance d de la Terre et $D + d$ du Soleil, la projection sur $\vec{e}_{x'}$ de la relation (1) s'écrit donc $0 = -\frac{GM_S m}{(D+d)^2} - \frac{GM_T m}{d^2} + m(D+d)\Omega^2$. Puisque $d << D$, on peut écrire :

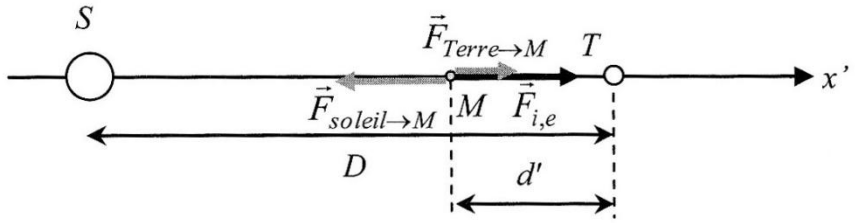
$\frac{GM_S}{(D+d)^2} = \frac{GM_S}{D^2}\left(1+\frac{d}{D}\right)^{-2} \approx \frac{GM_S}{D^2}\left(1-2\frac{d}{D}\right)$. D'où :

$-\frac{GM_S}{D^2} + 2\frac{GM_S d}{D^3} - \frac{GM_T}{d^2} + (D+d)\Omega^2 = 3\frac{GM_S d}{D^3} - \frac{GM_T}{d^2} = 0$ puisque $\Omega^2 = \frac{GM_S}{D^3}$. On montre bien que le point M est à l'équilibre dans R' s'il est situé à une distance $\boxed{d = D\left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{\frac{1}{3}}}$ de la Terre du côté opposé au Soleil.

3) On trouve $\boxed{d = 1{,}5 \text{ millions de km}}$.

4) Si le point M était légèrement plus éloigné de la Terre que le point L2, la force axifuge serait plus importante (rayon du point coïncident plus grand) et les deux forces gravitationnelles seraient plus faibles (éloignement des masses plus grand). Dans ce cas, la résultante des trois forces ne serait plus nulle et serait orientée selon $+\vec{e}_{x'}$, ce qui aurait tendance à éloigner d'autant plus le point M du point L2. On en déduit que le point L2 est instable selon l'axe Sx'.

5) On effectue le même raisonnement en plaçant cette fois-ci le point M entre la Terre et le Soleil, à une distance d' de la Terre.



A l'équilibre du point M dans R', on a toujours $\vec{0} = \vec{F}_{soleil\to M} + \vec{F}_{Terre\to M} + \vec{F}_{i,e}$ dont la projection sur $\vec{e}_{x'}$ s'écrit maintenant $0 = -\frac{GM_S m}{(D-d')^2} + \frac{GM_T m}{d'^2} + m(D-d')\Omega^2$.

Avec :

$\frac{GM_S}{(D-d')^2} = \frac{GM_S}{D^2}\left(1-\frac{d'}{D}\right)^{-2} \approx \frac{GM_S}{D^2}\left(1+2\frac{d'}{D}\right)$, on obtient :