Exercice n°3 : Points de Lagrange (difficile)

$-\frac{GM_S}{D^2}-2\frac{GM_S d'}{D^3}+\frac{GM_T}{d'^2}+(D-d')\Omega^2=-3\frac{GM_S d'}{D^3}+\frac{GM_T}{d'^2}=0$. Finalement, on constate que $\boxed{d'=d}$. Les deux points de Lagrange L1 et L2 sont situés à la même distance de la Terre. A noter que ce résultat n'est vrai que dans l'approximation $d << D$. Un calcul plus rigoureux montre que le point L1 est environ 10 000 km plus près de la Terre que ne l'est L2.

6) Avec les coordonnées cylindriques, la force axifuge s'écrit $\vec{F}_{i,e}=+m\Omega^2 r\vec{e}_r$, où r désigne la distance entre le point M et l'axe de rotation Sz'. Lors d'un déplacement infinitésimal $\vec{dr}$ du point M, le travail de cette force s'écrit $\delta W_{i,e}=\vec{F}_{i,e}.\vec{dr}=+m\Omega^2 r dr$, Ce travail peut se mettre sous la forme d'une différentielle totale exacte $\delta W_{i,e}=-dE_{p,ie}$ avec une énergie potentielle dont dérive la force axifuge valant $\boxed{E_{p,ie}(r)=-\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2}$ (en choisissant une énergie potentielle nulle sur l'axe Sz').

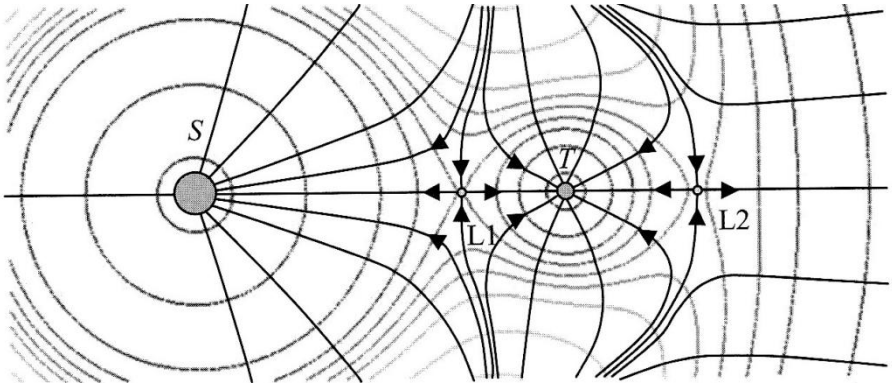
7) Nous savons que la force gravitationnelle subie par une masse m_1 de la part d'une masse m_2 est une force conservative dont l'énergie potentielle vaut $E_{p,grav}=-\frac{Gm_1m_2}{R}$, où R désigne la distance entre les deux masses.

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle totale du point M dans le référentiel R' :

$\boxed{E_{p,tot}=-\frac{GmM_S}{\left|\overrightarrow{SM}\right|}-\frac{GmM_T}{\left|\overrightarrow{ST}\right|}-\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2}$, où r désigne la distance entre M et l'axe Sz' (qui est égale à $\left|\overrightarrow{SM}\right|$ uniquement si le point M est dans le plan $Sx'y'$). Si l'on étudie le mouvement du point M dans le référentiel R', il faut ajouter la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{i,c}=-2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_M$ dans le bilan des forces.

8) On repère facilement le Soleil et la Terre puisqu'autour d'eux, les lignes équipotentielles sont approximativement des cercles.

Les lignes de champ de forces ont été tracées de telle manière à ce qu'elles coupent orthogonalement les lignes équipotentielles. Elles sont orientées pour être convergentes vers le Soleil et la Terre. Les points L1 et L2 sont repérés sur l'axe Soleil-Terre aux endroits où les lignes de champ de forces changent de sens. On constate que dans la direction perpendiculaire à l'axe Soleil-Terre, les lignes de champ convergent vers L1 et L2 : cela signifie que ces points sont stables selon cette direction.


S
T
L1
L2