

NATURE DE LA GRAVITATION (73)

I. — L'expérience d'Eötvös

1 — Le principe d'inertie affirme l'existence de certains référentiels, dit inertiels ou galiléens, relativement auxquels le mouvement d'un objet ne subissant aucune interaction est rectiligne et uniforme. Le PFD affirme qu'en présence de forces dont la résultante est notée \vec{F} , le mouvement d'un point matériel de masse m_i relativement à un référentiel inertiel est décrit par la relation $m_i \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$.

2 — La loi de la gravitation affirme que la force exercée par un corps de masse grave m_a sur un autre corps ponctuel de masse grave m_b est $\vec{F}_{a \rightarrow b} = -\mathcal{G} m_a m_b \frac{\vec{ab}}{\|\vec{ab}\|^2}$, cette expression permet de se passer d'un dessin, si on fait appel à un vecteur unitaire ce n'est plus le cas...

Remarque : La masse inertielle est une quantité physique exprimée en kilogrammes qui quantifie la difficulté de faire varier la vitesse du corps auquel elle est attachée. Deux objets de masses différentes soumis à la même force verront varier leur vitesse différemment : celui dont la masse inertielle est la plus grande sera soumis à la variation de vitesse la plus faible. La masse pesante est une quantité physique exprimée en kilogrammes qui quantifie la capacité d'un corps à ressentir la force de gravitation. Il s'agit donc d'une charge gravitationnelle. Il est très étonnant que ces deux quantités aient exactement la même valeur!

I.A. — Mesure de la constante de torsion

3 — Le raisonnement est abstrait mais efficace (avec des notations évidentes...)

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) dt = \vec{\omega} \cdot (\vec{OM} \wedge \vec{F}) dt = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_0 = -C\dot{\theta}(\theta - \theta_0) = -dE_p$$

Par intégration il vient alors $E_p = \frac{1}{2} C \theta^2 + \text{cste}$, on choisit la constante afin que $E_p(\theta_0) = 0$ ainsi $E_{p,S} = \frac{1}{2} C (\theta - \theta_0)^2$

Le moment d'inertie du solide S est J , son centre d'inertie est au repos, ainsi $E_{c,S} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$. On en déduit

$$E_{m,S} = \frac{1}{2} \left[J \dot{\theta}^2 + C (\theta - \theta_0)^2 \right]$$

4 — Le théorème de la puissance mécanique donne directement $\frac{dE_{m,S}}{dt} = -\alpha \dot{\theta}^2$ en dérivant l'expression obtenue précédemment il vient $J\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\dot{\theta}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) + \alpha\dot{\theta}^2 = 0$ en écartant la solution $\dot{\theta} = 0$ on obtient l'équation vérifiée par θ sous la forme $\ddot{\theta} + \frac{C}{J}\dot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = \frac{C}{J}\theta_0$

5 — Les oscillations apparaissent en cas de régime pseudo-périodique correspondant à un discriminant de l'équation caractéristique du mouvement négatif : $\Delta = \left(\frac{C}{J}\right)^2 - 4\frac{C}{J}\alpha < 0$ soit $\alpha^2 < 4CJ$. Les racines de l'équation caractéristique sont $\lambda_{\pm} = -\frac{\alpha}{2J} \pm i\sqrt{\frac{C}{J} - \left(\frac{\alpha}{2J}\right)^2}$. La solution s'écrit sous la forme

$$\theta(t) = \theta_0 + \exp\left(-\frac{\alpha t}{2J}\right) \left\{ A \cos\left[t\sqrt{\frac{C}{J} - \left(\frac{\alpha}{2J}\right)^2}\right] + B \sin\left[t\sqrt{\frac{C}{J} - \left(\frac{\alpha}{2J}\right)^2}\right] \right\}$$

où A et B pourraient être déterminés par la donnée de conditions initiales. Pour les courageux avec $\theta(0) = \theta_m$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ on trouve

$$A = \theta_m - \theta_0 \text{ et } B = \frac{\alpha(\theta_m - \theta_0)}{\sqrt{4CJ - \alpha^2}}$$

mais il était recommandé de ne pas le faire... On a bien sûr $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_0$, cette limite est fixée par la solution de l'équation sans second membre. La pseudo-période est $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{C}{J} - \left(\frac{\alpha}{2J}\right)^2}}$, la période propre est

celle du mouvement non amorti ($\alpha = 0$), elle s'écrit donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ on peut donc écrire $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ avec

$\varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{CJ}}$. L'hypothèse $\varepsilon \ll 1$ permet d'écrire $T \approx T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$ ainsi $\frac{\delta T}{T_0} = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\varepsilon^2}{2}$, en prenant $T = T_0$

l'erreur relative commise est inférieure à 1% si $\frac{\varepsilon^2}{2} < 10^{-2}$ soit $\varepsilon < \sqrt{2} \times 10^{-1} \approx 0,141$.

6 — On a vu que $T = T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ et $J = 2J_1 + 2mL^2 + J_0$ on en déduit que

$$T^2 = \frac{8m\pi^2}{C} L^2 + \frac{4\pi^2(2J_1 + J_0)}{C}$$

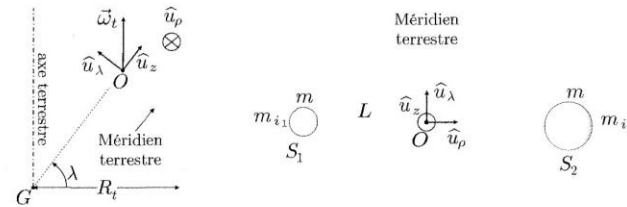
La fonction $T^2(L^2)$ est une droite de pente $\frac{8m\pi^2}{C}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{4\pi^2(2J_1 + J_0)}{C}$. L'ajustement linéaire de T^2 en $\lambda L^2 + \mu$ à partir des données du tableau donne $\lambda = 5.27 \cdot 10^7$ SI et $\mu = 10^3$ SI. On a donc $\lambda = \frac{8m\pi^2}{C}$

soit $C = \frac{8\pi^2 m^2}{\lambda}$ ce qui permet de calculer $C = \frac{8 \times 0,2 \times \pi^2}{5,27 \cdot 10^7} = 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Dans l'intervalle d'étude

$T^2 \approx 2.10^5 \text{ s}^2 \gg \mu$, on peut donc négliger la contribution de l'ordonnée à l'origine dans le calcul de T^2 et se contenter de $T^2 \approx \frac{8m\pi^2}{C} L^2$ on obtient donc $m \approx \frac{CT^2}{8\pi^2 L^2}$.

I.B. — Résultats et précision de l'expérience

7 — Les forces appliquées au système sont les poids des deux sphères et de la barre $\vec{F}_{g,1} = -m_1 \vec{g}$, $\vec{F}_{g,2} = -m_2 \vec{g}$ et $\vec{F}_{g,0} = -Mg \vec{u}_z$, la force de rappel exercée par le ruban de torsion, la force d'inertie appliquée sur chaque sphère $\vec{F}_{i,j=1,2} = -m_i \frac{d\vec{v}}{dt} + m_i \vec{r}_j \wedge \frac{d\vec{\omega}}{dt} + m_i \vec{\omega}_t \wedge (\vec{r}_j \wedge \vec{\omega}_t) + 2m_i \frac{d\vec{r}_j}{dt} \wedge \vec{\omega}_t$. La vitesse de translation du référentiel de laboratoire par rapport au référentiel terrestre est nulle $\vec{V} = \vec{0}$, et l'on suppose que $\vec{\omega}_t = \text{cste}$, le vecteur $\vec{r}_j = \vec{GM}_j = R_i \vec{u}_z + \vec{OM}_j$ est lui aussi constant, on a donc $\vec{F}_{i,j} = m_i \vec{\omega}_t \wedge [(R_i \vec{u}_z + \vec{OM}_j) \wedge \vec{\omega}_t]$. Fixons quelques vecteurs unitaires à l'équilibre.



On a donc $\vec{\omega}_t = \omega_t (\cos \lambda \vec{u}_z + \sin \lambda \vec{u}_\lambda)$, $\vec{OM}_1 = -L \vec{u}_\rho$ et $\vec{OM}_2 = +L \vec{u}_\rho$ ainsi

$$\begin{aligned} (R_i \vec{u}_z + \vec{OM}_1) \wedge \vec{\omega}_t &= \omega_t (R_i \vec{u}_z - L \vec{u}_\rho) \wedge (\cos(\lambda) \vec{u}_z + \sin(\lambda) \vec{u}_\lambda) \\ &= -\sin(\lambda) \omega_t R_i \vec{u}_\rho + \cos(\lambda) L \omega_t \vec{u}_\lambda - \sin(\lambda) L \omega_t \vec{u}_z \\ (R_i \vec{u}_z + \vec{OM}_2) \wedge \vec{\omega}_t &= \omega_t (R_i \vec{u}_z + L \vec{u}_\rho) \wedge (\cos(\lambda) \vec{u}_z + \sin(\lambda) \vec{u}_\lambda) \\ &= -\sin(\lambda) \omega_t R_i \vec{u}_\rho - \cos(\lambda) \omega_t L \vec{u}_\lambda + \sin(\lambda) \omega_t L \vec{u}_z \end{aligned}$$

ainsi

$$\vec{F}_{i,1} = m_{i,1} \vec{\omega}_t \wedge [\vec{GM}_1 \wedge \vec{\omega}_t] = m_{i,1} \omega_t^2 (-\sin(\lambda) \cos(\lambda) R_t \hat{u}_\lambda - L \hat{u}_\rho + \sin^2(\lambda) R_t \hat{u}_z)$$

et

$$\vec{F}_{i,2} = m_{i,2} \vec{\omega}_t \wedge [\vec{GM}_2 \wedge \vec{\omega}_t] = m_{i,2} \omega_t^2 (-\sin(\lambda) \cos(\lambda) R_t \hat{u}_\lambda + L \hat{u}_\rho + \sin^2(\lambda) R_t \hat{u}_z)$$

8 — Le moment en G des forces d'inertie s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{M}_{i,1} &= \vec{GM}_1 \wedge \vec{F}_{i,1} \\ &= m_{i,1} \omega_t^2 (\sin(\lambda) \cos(\lambda) R_t^2 \hat{u}_\rho - L R_t \cos^2(\lambda) \hat{u}_\lambda + \sin(\lambda) \cos(\lambda) R_t L \hat{u}_z) \\ \vec{M}_{i,2} &= \vec{GM}_2 \wedge \vec{F}_{i,2} \\ &= m_{i,2} \omega_t^2 (\sin(\lambda) \cos(\lambda) R_t^2 \hat{u}_\rho + L R_t (1 + \sin^2(\lambda)) \hat{u}_\lambda - \sin(\lambda) \cos(\lambda) R_t L \hat{u}_z) \end{aligned}$$

Les poids sont selon \hat{u}_z , ils n'ont donc pas de moment en G, à l'équilibre la composante selon \hat{u}_z du moment des forces de rappel est $M_{r,z} = -C(\theta_{\infty} - \theta_0)$. La projection sur \hat{u}_z du théorème du moment cinétique à l'équilibre de la première expérience s'écrit donc

$$-C(\theta_{\infty} - \theta_0) + (m_{i,1} - m_{i,2}) \omega_t^2 \sin(\lambda) \cos(\lambda) R_t L = 0$$

Pour la seconde expérience il suffit de remplacer θ_{∞} par $\theta_{\infty 2}$ et d'inverser $m_{i,1}$ et $m_{i,2}$ on a donc

$$-C(\theta_{\infty 2} - \theta_0) + (m_{i,2} - m_{i,1}) \omega_t^2 \sin(\lambda) \cos(\lambda) R_t L = 0$$

la différence de ces deux équations fournit finalement

$$\Delta\theta = \theta_{\infty 1} - \theta_{\infty 2} = \frac{(m_{i,1} - m_{i,2}) \omega_t^2 R_t L}{C} \sin(2\lambda)$$

9 — L'expression obtenue à la question précédente et la relation $m = \frac{CT^2}{8\pi^2 L^2}$ permettent d'écrire

$$\delta m = \frac{(m_{i,1} - m_{i,2})}{m} = \frac{8\pi^2 \Delta\theta L}{T^2 \omega_t^2 R_t \sin(2\lambda)}$$

la lunette permet une résolution angulaire maximale $\Delta\theta_{\max} = \frac{10^{-3}}{2}$, la valeur de la période correspondant à $L = 6 \text{ cm}$ est $T = 463 \text{ s}$, la pulsation de la terre est $\omega_t = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, pour la latitude 45° on a donc $\delta m_{\max} = \frac{4\pi^2 \times 10^{-3} \times 6 \cdot 10^{-2}}{2,1 \cdot 10^6 \times 5,3 \cdot 10^{-3} \times 6,4 \cdot 10^6 \times 1}$ soit $\delta m_{\max} = 3,3 \cdot 10^{-7}$.

10 — Si la déviation observée est nulle, c'est en fait que $\delta m < \delta m_{\max}$ soit $|m_{i,1} - m_{i,2}| < m \times \delta m_{\max}$ avec une masse $m = 200 \text{ g}$ on vérifie le principe d'équivalence (ici l'égalité des masses inertielles) à $6,7 \cdot 10^{-6}$ près! Ce qui n'est pas rien...

FIN DE LA PARTIE I

II. — Vers une correction de la gravitation universelle classique

II.A. — Gravitation newtonienne, matière noire

11 — L'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et l'équation de Maxwell-Faraday statique $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ montrent l'analogie étroite existant entre la gravitation classique et l'électrostatique. Seul le signe des charges indique une différence entre les deux modèles : les charges électriques peuvent être de signe différent, les charges gravitationnelles (masses pesantes) sont toutes positives (jusqu'à ce que GBAR le confirme en tous cas...).

Les deux autres équations de Maxwell indiquent en statique que $\text{div } \vec{B} = 0$ et que $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$: la source du champ magnétique n'est pas constituée de monopoles magnétiques, c'est le courant des charges électrique qui crée l'interaction magnétostatique. C'est une différence fondamentale avec l'électrostatique et donc la gravitation. En électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$ avec $\vec{E} = -\text{grad } V$, l'existence du potentiel électrique est garantie par le fait qu'en électrostatique $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$. On peut donc faire la même chose avec le potentiel gravitationnel et le champ de gravitation $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$ avec $\vec{\Gamma} = -\text{grad } \phi$, en prenant la divergence on obtient alors $\text{div}(\text{grad } \phi) = \Delta\phi = 4\pi G\rho$ qui est l'équation de Poisson pour la gravitation.

$$\vec{F} = -m \frac{d\phi}{dr} \hat{u}_r$$

12 — La force subie par une particule de masse m située dans \mathcal{G} s'écrit $\vec{F} = -m \text{grad } \phi$ cette force est donc radiale puisque $\phi = \phi(r)$, on a donc $\vec{F} = F\hat{u}_r$. Le moment cinétique de la particule de masse m s'écrit $\vec{L} = m\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$, sa dérivée temporelle est donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, le PFD appliqué à cette particule indique que $m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F\hat{u}_r$, ainsi $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ et le mouvement de M s'effectue dans le plan orthogonal au vecteur \vec{L} constant.

En coordonnées polaires dans ce plan $r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m}$, il s'agit de la constante des aires.

13 — En coordonnées polaires, dans le plan du mouvement, la position est donnée par $\vec{r} = r\hat{u}_r$, la vitesse est donc $\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$, pour une orbite circulaire on a donc $\vec{v}_c = r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$, le PFD donne alors pour cette orbite $m\vec{a}_c = mr\ddot{\theta}\hat{u}_\theta - mr\dot{\theta}^2\hat{u}_r = -m \frac{d\phi}{dr} \hat{u}_r$ on a donc $r\ddot{\theta} = 0$ (la vitesse angulaire est également constante, mais ce n'est pas demandé...) et $\dot{\theta}^2 = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}$, la fonction $\phi(r)$ étant croissante on peut sans problème prendre la racine et

reporter l'expression de $\dot{\theta}$ dans celle de \vec{v}_c pour trouver $\vec{v}_c = \sqrt{r \frac{d\phi}{dr}} \hat{u}_\theta$

14 — Si $\phi(r) = -\frac{GMm}{r}$ alors $\vec{v}_c = \sqrt{\frac{GMm}{r}} \hat{u}_\theta$. Ce modèle est dit keplerien pour d'innombrables raisons...

Les lois de Kepler lui sont applicables : la seule à « vérifier » est la troisième mais comme nous avons vu que la vitesse était constante la période est simplement $T = \frac{2\pi r}{|\vec{v}_c|} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GMm}}$ et donc $T^2 = \frac{4\pi^2}{GMm} r^3$. Les potentiels en $1/r$ sont dits képlériens car ce sont eux qui donnent des forces newtoniennes en $1/r^2$: ce sont bels et bien les travaux de Kepler qui ont mis Newton sur la voie...

15 — La courbe montre qu'en dehors du bulbe la vitesse circulaire est constante et de l'ordre de $|\vec{v}_c| \simeq 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Le modèle képlerien n'est donc pas valable car il prévoit une décroissance en $1/\sqrt{r}$.

16 — L'équation de Poisson $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ s'écrit en coordonnées sphériques sous la forme

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{4\pi G C_0}{r_0^2 + r^2} \implies r^2 \frac{d\phi}{dr} = 4\pi G C_0 \int_0^r \frac{x^2}{r_0^2 + x^2} dx = r - r_0 \int_0^{\frac{r}{r_0}} \frac{1}{1+y^2} dy = r - r_0 \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

on a donc $r \frac{d\phi}{dr} = 4\pi G C_0 \left[1 - \frac{r_0}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right) \right]$ avec cette répartition de matière le module de la vitesse circulaire devient $v_c(r) = \sqrt{4\pi G C_0 \left[1 - \frac{r_0}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right) \right]^{1/2}}$, ainsi dès que $r > r_0$ la quantité $\frac{r_0}{r} \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right)$ devient très vite négligeable devant 1, et donc $v_c(r) \simeq \sqrt{4\pi G C_0} = \text{cte}$. La constante r_0 peut être assimilée au rayon du bulbe, enfin on peut calculer C_0 afin que la valeur constante de la vitesse circulaire soit celle observée dans

notre galaxie. Avec des chiffres on trouve $C_0 = \frac{(220 \cdot 10^3)^2}{4\pi \times 6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,77 \cdot 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} = 9 \cdot 10^5 M_\odot \cdot \text{pc}^{-1}$ cela fait beaucoup car dans une galaxie il y a en moyenne une étoile comme le soleil tous les parsecs...

17 — Le théorème de Gauss (par exemple...) donne $M(r) = \frac{r^2}{G} \frac{d\phi}{dr} = 4\pi C_0 \left[r - r_0 \arctan\left(\frac{r}{r_0}\right) \right]$ car nous l'avons calculé plus haut... Comme $R_d \gg r_0$, on peut considérer que $M(R_d) = 4\pi C_0 R_d$ soit numériquement $M(R_d) \simeq 9 \cdot 10^5 \times 30 \cdot 10^3 \times 4\pi = 3,4 \cdot 10^{11} M_\odot$. La matière visible ne représente donc dans ce modèle que moins de 5% de la matière noire...

II.B. — Gravitation modifiée

18 — Pour que u soit sans dimension il faut que a_0 soit homogène au gradient d'un potentiel c'est-à-dire une accélération. Si u n'est pas faible, la constante « traverse » la divergence et on retrouve la gravitation classique que si $K = 1$.

19 — L'équation de Poisson classique s'écrit $\text{div}(\text{grad } \phi) = 4\pi G\rho$ et la modifiée $\text{div}(\mu(u) \text{grad } \phi_m) = 4\pi G\rho$, par différence des deux relations et linéarité de la divergence on a donc $\text{div}[\mu(u) \text{grad } \phi_m - \text{grad } \phi] = 0$. Les vecteurs à divergence nulle sont des rotationnels, c'est la propriété de la divergence rappelée dans le formulaire, il existe donc un vecteur \vec{h} tel que $\mu(u) \text{grad } \phi_m - \text{grad } \phi = \text{rot } \vec{h}$ ce qui est la relation cherchée.

20 — On écrit que $\mu(u) \text{grad } \phi_m = \text{grad } \phi = \frac{GM_b}{r^2} \hat{u}_r$, dans le régime $u \ll 1$, on a donc $|\text{grad } \phi_m| \text{grad } \phi_m = \frac{a_0 GM_b}{r^2} \hat{u}_r$ en projection sur \hat{u}_r on a donc $\left| \frac{d\phi_m}{dr} \right| = \sqrt{\frac{a_0 GM_b}{r}}$, l'expression de la vitesse circulaire est la même car ϕ_m est toujours radial et le PFD est inchangé dans MOND, on a donc ici $v_c(r)^2 = r \left| \frac{d\phi_m}{dr} \right| = \sqrt{a_0 GM_b}$ soit $v_c(r) = (a_0 GM_b)^{1/4}$ et donc $n = 4$.

21 — Pour rendre compte des observations, il faut que $(a_0 GM_b)^{1/4} = v_0 = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Soit $a_0 = \frac{v_0^4}{GM_b}$ et numériquement $a_0 = \frac{(220 \cdot 10^3)^4}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{30} \cdot 2 \cdot 10^{30}}$ on faisant le calcul on trouve $a_0 = 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La théorie Mond s'applique pour des régimes de champ gravitationnels ϕ tels que $|\text{grad } \phi| \ll a_0$ on est bien dans un régime de gravitation très faible pour lequel seules les galaxies peuvent être concernées : l'ordre de grandeur (un peu sous estimé...) de l'accélération au sein de la galaxie peut être évalué en calculant $a_g = \frac{GM_b}{R_b^2}$ soit $a_g \approx 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ on est bien dans le bon régime!

FIN DE LA PARTIE II

III. — Expérience GBAR — Peser l'antimatière ?

III.A. — Piéger une particule

22 — L'expression de la force électrostatique $\vec{F} = -q \text{grad } V$ permet de lire le gradient du potentiel et d'écrire l'équation de Laplace $\Delta V = 0 \implies \text{div}(\text{grad } V) = -\frac{1}{q}(2a + b) = 0$ on en déduit que $b = -2a$. En intégrant l'expression du gradient du potentiel on obtient alors $V(x, y, z) = -\frac{a}{2q}(x^2 + y^2) + \frac{a}{q}z^2 + K$. La constante d'intégration K et la valeur de a sont fixées par les conditions aux limites $K = V_0 + \frac{ar_0^2}{2q}$ et $a = -\frac{qV_0}{r_0^2}$, en utilisant finalement le fait que $r_0^2 = 2z_0^2$ il vient $V(x, y, z) = \alpha + \beta(x^2 + y^2 - 2z^2)$ avec $\alpha = \frac{V_0}{2}$ et

$\beta = \frac{V_0}{2r_0^2}$. $V(x, y, z) = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{2r_0^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$

23 — Le plan xOz est tel que $y = 0$, le potentiel a pour expression $V(x, 0, z) = \frac{V_0}{2r_0^2}(x^2 - 2z^2 + r_0^2)$ pour simplifier l'étude prenons $V_0 = 2$ et $r_0 = 1$, les isopotentielles sont les courbes d'expression $x^2 = k - 1 + 2z^2$.
 — Si $k = 1$ ce sont les deux droites $x = \pm\sqrt{2}z$.
 — Si $k < 1$, x n'est pas défini pour toutes les valeurs de z , les courbes présentent des tangentes verticales sur la droite $z = 0$, qui est axe de symétrie des courbes tout comme la droite $x = 0$. Les courbes ont pour asymptote les droites $x = \pm\sqrt{2}z$.
 — Si $k > 1$, est défini pour toutes les valeurs de z , les courbes présentent des tangentes horizontales sur la droite $x = 0$, qui est axe de symétrie des courbes tout comme la droite $z = 0$. Les courbes ont pour asymptote les droites $x = \pm\sqrt{2}z$.

Le plan xOy est tel que $z = 0$, le potentiel a pour expression $V(x, 0, z) = \frac{V_0}{2r_0^2}(x^2 + y^2 + r_0^2)$ pour simplifier l'étude prenons $V_0 = 2$ et $r_0 = 1$, les isopotentielles sont les courbes d'expression $x^2 + y^2 = k - 1$, c'est-à-dire les cercles centrés sur l'origine et de rayon $\sqrt{k-1}$ avec $k > 1$. Les lignes de champ sont les courbes normales aux isopotentielles. Le tout est représenté sur la figure 1.

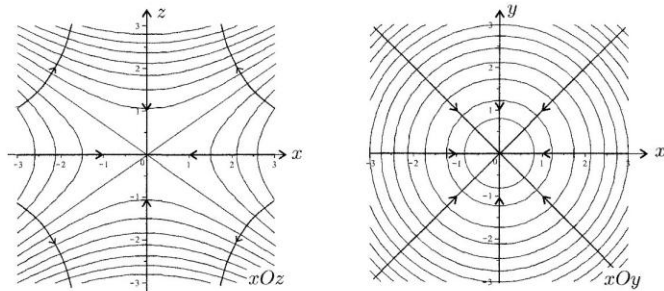


FIGURE 1 — Isopotentielles et lignes du champ électrostatique du piège de Penning

tte ébauche de raisonnement cohérent

24 — Le PFD s'écrit $m\vec{a} = \vec{F} = \frac{qV_0}{r_0^2}(-x\hat{u}_x - y\hat{u}_y + 2z\hat{u}_z)$ en écrivant l'accélération en coordonnées cartésiennes il vient

$$\ddot{x} + \frac{qV_0}{mr_0^2}x = 0, \quad \ddot{y} + \frac{qV_0}{mr_0^2}y = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} - \frac{2qV_0}{mr_0^2}z = 0$$

Le point $O(0, 0, 0)$ est toujours tel que $\vec{a} = \vec{0}$, il s'agit bien d'un équilibre. Si $q > 0$, les équations en x et y sont celles d'un oscillateur harmonique l'équilibre est stable dans le plan xOy , par contre l'équation pour z met en évidence une instabilité. Si q est négatif, c'est l'inverse l'origine est instable dans le plan xOy et stable selon l'axe Oz . L'équilibre est donc globalement instable quelle que soit la charge piégée.

III.B. — Piège de Penning

25 — Pour le piège de Penning la force est maintenant $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B})$, avec $q = -e$ le PFD en projection cartésienne s'écrit donc

$$\left(\frac{eV_0}{r_0^2}x - eB_0\dot{y} - m\ddot{x}\right)\hat{u}_x + \left(\frac{eV_0}{r_0^2}y + eB_0\dot{x} - m\ddot{y}\right)\hat{u}_y - \left(\frac{2eV_0}{r_0^2}z + m\ddot{z}\right)\hat{u}_z = \vec{0}$$

en introduisant $\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{mr_0^2}}$ et $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ il vient

$$\ddot{x} + \omega_0\dot{y} - \omega_0^2x = 0, \quad \ddot{y} - \omega_0\dot{x} - \omega_0^2y = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} + 2\omega_0^2z = 0$$

On remarque que $-i\dot{\zeta} = -i\dot{x} + \dot{y}$ et donc que les deux premières équations se rassemblent en une seule pour la fonction ζ qui s'écrit $\ddot{\zeta} - i\omega_c\dot{\zeta} - \omega_0^2\zeta = 0$ que l'on complète par $\ddot{z} + 2\omega_0^2z = 0$.

La composante z reste toujours confinée car elle est solution d'une équation harmonique. L'équation caractéristique de l'équation vérifiée par $\zeta(t) = e^{\lambda t}$ est $\lambda^2 - i\omega_c\lambda - \omega_0^2 = 0$ son discriminant est $\Delta = 4\omega_0^2 - \omega_c^2 = (2\omega_0 - \omega_c)(2\omega_0 + \omega_c)$. Deux cas sont envisageables :

- Si $\omega_c \geq 2\omega_0$ alors $\Delta \leq 0$, il existe donc un unique réel $\delta \geq 0$ tel que $(\pm i\delta)^2 = \Delta$. Les solutions de l'équation caractéristique sont $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_c \pm \delta)i$, la variable ζ et donc les composantes x et y restent confinés. Le cas $\delta = 0$ correspond à $\omega_c = 2\omega_0$.
- Si $\omega_c < 2\omega_0$ alors $\Delta > 0$, il existe donc un unique réel $\delta > 0$ tel que $(\pm\delta)^2 = \Delta$. Les solutions de l'équation caractéristique sont $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(i\omega_c \pm \delta)$, la solution δ_+ conduit à une divergence de la fonction $\zeta(t)$ pour $t \rightarrow +\infty$.

L'introduction du champ magnétique permet donc de piéger l'antiproton si

$$\omega_c \geq 2\omega_0 \text{ soit } B_0 \geq \frac{2}{r_0} \sqrt{\frac{mV_0}{e}}$$

numériquement on trouve $B_{\min} = 8,1 \cdot 10^{-2} \text{ T}$, le champ appliqué ($B_0 = 1,0 \text{ T}$) est donc largement suffisant.

26 — Dans les conditions imposées $\omega_c = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,7 \cdot 10^{-27}} \approx 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_0 = 3,8 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ainsi $\omega_c \gg \omega_0$. On a donc $\Delta = 4\omega_0^2 - \omega_c^2 = -\omega_c^2 \left(1 - 4\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2\right)$ qui est négatif dans le cas considéré. On écrit $\Delta = \left[\pm i\omega_c \left(1 - 2\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2\right)\right]^2$ soit finalement $\lambda_+ \approx i\omega_c$ et $\lambda_- \approx i\omega_1$ avec $\omega_1 \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_c} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On peut donc écrire $\zeta(t) \approx Ae^{i\omega_1 t} + Be^{i\omega_c t}$ où A et B sont deux complexes que les conditions initiales dans le plan xOy permettent de fixer. Le fait que $x(t) = \text{Re}(\zeta(t))$ et $y(t) = \text{Im}(\zeta(t))$ permet d'affirmer que le mouvement dans le plan xOy est la superposition de deux oscillations, l'une de pulsation rapide de l'ordre de ω_c et l'autre à une pulsation plus lente de l'ordre de $\omega_1 \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_c}$ autour des conditions initiales dans ce plan. Un troisième mouvement oscillant selon l'axe Oz s'effectue à la pulsation lente $\sqrt{2}\omega_0$ autour du plan xOy .

27 — L'énergie d'entrée E est cinétique donc l'équirépartition est applicable et $E = \frac{3}{2}k_B T$; avec $E = 5 \text{ Mev}$ on trouve $T = 3,8 \cdot 10^{10} \text{ K}$. L'équation du mouvement selon Oz s'écrit $\ddot{z} + 2\omega_0^2z = 0$ en multipliant par $m_p \dot{z}$

et en intégrant il vient $E = \frac{1}{2}m_p \dot{z}^2 + m_p \omega_0^2 z^2$ on obtient donc

$$\langle E \rangle_{T_0} = \frac{1}{2} m_p \langle \dot{z}^2 \rangle_{T_0} + m_p \omega_0^2 \langle z^2 \rangle_{T_0} \quad (1)$$

L'intégration de l'équation du mouvement donne alors $z(t) = A \cos(\sqrt{2}\omega_0 t + \varphi)$ soit $\langle z^2 \rangle_{T_0} = \frac{1}{2} A^2$, par ailleurs $\dot{z}(t) = -\sqrt{2}\omega_0 A \sin(\sqrt{2}\omega_0 t + \varphi)$ donc $\langle \dot{z}^2 \rangle_{T_0} = \frac{1}{2} 2\omega_0^2 A^2 = 2\omega_0^2 \langle z^2 \rangle_{T_0}$ que l'on injecte dans (1) pour obtenir $\langle E \rangle_{T_0} = 2m_p \omega_0^2 \langle z^2 \rangle_{T_0}$. L'équation du mouvement livre quant à elle la relation $\langle z^2 \rangle_{T_0} = \frac{1}{4\omega_0^2} \langle \dot{z}^2 \rangle_{T_0}$. On trouve donc finalement la relation $\langle \dot{z}^2 \rangle_{T_0} = \frac{2\omega_0^2}{m_p} \langle E \rangle_{T_0}$. Le théorème de la puissance mécanique sur une période s'écrit avec le résultat fourni $\langle \frac{dE}{dt} \rangle_{T_0} = \langle P_{ray} \rangle_{T_0} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \langle \dot{z}^2 \rangle_{T_0} = \frac{\mu_0 \omega_0^2 e^2}{3m_p \pi c} \langle E \rangle_{T_0}$ soit

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{T_0} - \frac{1}{\tau} \langle E \rangle_{T_0} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{3m_p \pi c}{\mu_0 e^2 \omega_0^2}$$

L'application numérique est sans appel, on trouve en effet $\tau = \frac{3 \times 1,7 \cdot 10^{-27} \times \pi \times 3 \cdot 10^8}{4\pi \cdot 10^{-7} \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \times (3,8 \cdot 10^6)^2} \simeq 10^{13} \text{s}$ (soit plusieurs dizaines de millions d'années) : ce mécanisme n'est pas suffisamment efficace pour refroidir les antiprotons ! Avec une masse mille fois plus faible et donc un ω_0^2 mille fois plus grand ce temps est réduit d'un facteur 10^6 pour les électrons, il reste trop grand (quelques centaines de jours) pour les applications dans Gbar.

III.C. — Principe de la mesure

28 — Si le gaz est parfait l'énergie d'une particule est purement cinétique donc $u = \frac{1}{2} m v_0^2$, et sa vitesse moyenne nulle $\overline{v_0} = 0$ à cause de l'isotropie des vitesses. Chaque particule possède trois degrés de liberté quadratiques, le théorème d'équipartition de l'énergie donne alors $u = \frac{3}{2} k_B T$. En identifiant il vient

$\sigma_v = \sqrt{v_0^2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$. Dans le modèle du gaz parfait, la vitesse moyenne des anti-hydrogène est donc nulle avec un écart type de σ_v . La masse d'un anti-hydrogène est celle d'un proton, avec $T = 10 \mu\text{K}$ on trouve $\sigma_v = 49 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

29 — Soit O le point du photo-détachement à l'instant $t = 0$, et Oz la verticale ascendante la projection du PFD sur cet axe donne $m_i \frac{d^2 z}{dt^2} = -m_g \bar{g}$ en appliquant le principe d'équivalence $m_i = m_g$, on peut intégrer pour avoir $z(t) = -\frac{1}{2} \bar{g} t^2 \pm v_0 t + z(t=0)$. Dans le repère choisi $z(t=0) = 0$, on sait par ailleurs que $-h = z(t_c) = -\frac{1}{2} \bar{g} t_c^2 \pm v_0 t_c$ on en déduit que $\bar{g} = \frac{2(h \pm v_0 t_c)}{t_c^2}$. Le signe de la vitesse initiale n'est pas connu, en fait on s'en moque car $v_0 = 0 \dots$

30 — Avec $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $t_c = 0,143 \text{ s}$ et $h = 10,0 \text{ cm}$ il vient $\bar{g} = \frac{2 \times 0,1}{(0,143)^2} = 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

31 — L'expression de \bar{g} s'écrit $\bar{g} = 2 \frac{h}{t_c^2} \pm \frac{v_0}{t_c}$, seul h et v_0 sont incertains et indépendants, sans prendre de risque on peut écrire $\sigma_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{2\delta h}{t_c^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta v_0}{t_c}\right)^2}$ avec N mesures selon des distributions gaussiennes, on obtient

$\delta h = \frac{\sigma_h}{\sqrt{N}}$ et $\delta v_0 = \frac{\sigma_v}{\sqrt{N}}$ on trouve donc $\delta \bar{g} = \frac{2}{t_c \sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sigma_h^2}{t_c^2} + \frac{3k_B T}{m}}$.

32 — On écrit que $\frac{\delta \bar{g}}{\bar{g}} < \frac{1}{100}$, soit en utilisant les expressions obtenues $N > \frac{4 \cdot 10^4}{9^2 t_c^2} \left(\frac{\sigma_h^2}{t_c^2} + \frac{3k_B T}{m} \right)$, numériquement $N > \frac{4 \cdot 10^4}{9,78^2 \times 0,143^2} \left(\frac{10^{-8}}{0,143^2} + 0,247 \right)$ soit $N > 2,0 \cdot 10^4$.

FIN DE LA PARTIE III

FIN DE L'ÉPREUVE