Exercice 1

Conduction électrique	conduction thermique
* intensité du courant I	* flux thermique Φ
$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$	$\Phi = \iint \vec{j_{th}} \cdot \vec{dS}$
$I = \frac{dq}{dt}$ → charge	$\Phi = \frac{dQ}{dt}$ → transfert thermique
* potentiel V	* température T
résistance électrique R	résistance thermique R_{th}
$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \, \vec{grad}(V)$	$\vec{j_{th}} = -\lambda \, \vec{grad}(T)$
↳ conductivité électrique	↳ conductivité thermique
$I = \frac{V_1 - V_2}{R}$ (loi d'ohm)	$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$
* bilan de charges :	* bilan d'énergie :
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0$	$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + div(\vec{j_{th}}) = 0$
R.S : $div(\vec{j}) = 0$	R.S. $div(\vec{j_{th}}) = 0$

Exercice 2

1) ⓐ σ tq $\boxed{dq = \sigma . dS}$

ⓑ Si σ = cte (valeur moyenne) alors

$Q = \int_{(S)} \sigma . dS = \sigma \int_{(S)} dS = \sigma . S$, D'où

$\boxed{\sigma = \frac{Q}{S}}$. A.N. : $\sigma = 2,6 . 10^{-15} C . m^{-2}$

avec $Q = 1000 . e$

2) λ tq $\boxed{dq = \lambda . dS}$

Exercice 3

Par définition : $Q = \iiint_{(V)} \rho(r) \cdot \underbrace{d\tau}$

1ère méthode :

$$Q = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r) \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}$$

$$= \left[\int_0^a \rho(r) \cdot r^2 dr\right] \cdot \underbrace{\left[\int_0^\pi \sin\theta \cdot d\theta\right]}_{=2} \cdot \underbrace{\left[\int_0^{2\pi} d\varphi\right]}_{=2\pi}$$

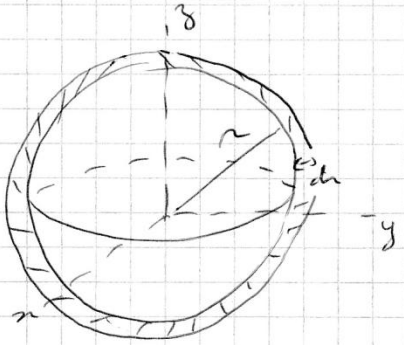
(...)

$$\boxed{Q = \frac{8}{15} \pi \rho_0 \cdot a^3}$$

2ème méthode

On découpe le volume d'intégration en coquilles sphériques de volume

$$d\tau = \underbrace{4\pi r^2}_{\text{surface de la sphère}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{épaisseur de la coquille}}$$

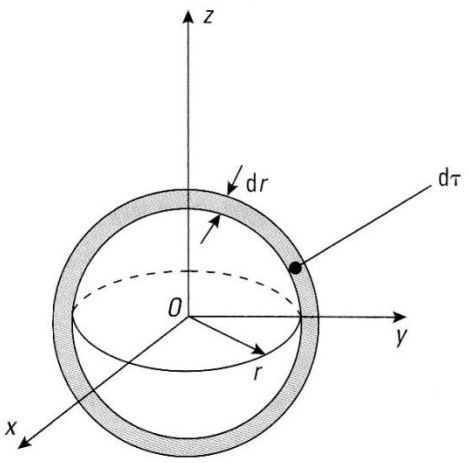


D'où : $Q = \int_0^a \rho(r) \cdot 4\pi \cdot r^2 dr$

qui donne le même résultat.

Exercice 4

1) Il faut utiliser la définition de la densité volumique de charges : $\rho(r) = \dfrac{dq}{d\tau}$ pour un volume élémentaire $d\tau$ soit $dq = \rho d\tau$. Cherchons à expliciter le volume élémentaire en utilisant le système de coordonnées le mieux adapté, ici les coordonnées sphériques. On peut choisir une coquille de rayon moyen r et d'épaisseur dr :



Choisir ce volume élémentaire $d\tau$ revient à avoir déjà intégrer sur les variables sphériques θ et φ avec ici : $d\tau = 4\pi r^2\, dr$ (l'écriture complète avec les trois variables d'espace étant $d\tau = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$).

La charge totale électronique est localisée sur l'espace entier et est égale à $-e$ donc :

$$-e = \iiint_{(V)} \rho\, d\tau = \int_0^{+\infty} A e^{-2r/a_0}\, 4\pi\, r^2\, dr$$

On intègre par parties :

$$-e = \left[-2\pi\, r^2 a_0\, A e^{-2r/a_0}\right]_0^{+\infty} + 4\pi\, a_0 A \int_0^{+\infty} e^{-2r/a_0}\, r\, dr$$

$$= 4\pi\, a_0 A \int_0^{+\infty} e^{-2r/a_0}\, r\, dr$$

Avec :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2r/a_0}\, r\, dr = \left[-a_0/2\, e^{-2r/a_0}\, r\right]_0^{+\infty} + a_0/2 \int_0^{+\infty} e^{-2r/a_0}\, dr = -a_0^2/4\left[e^{-2r/a_0}\right]_0^{+\infty} = a_0^2/4$$

Finalement : $-e = \pi a_0^3\, A$ c'est-à-dire $\boldsymbol{A = -\dfrac{e}{\pi a_0^3}}$. On vérifie que cette constante est homogène à une charge volumique et de signe négatif comme attendu.

Exercice 5

La section du fil est $s = \dfrac{\pi d^2}{4}$, d'où la résistance $\underline{R} = \dfrac{4l}{\pi\sigma d^2} \approx \underline{0{,}9.10^{-2}\,\Omega}$; ce centième d'Ohm est largement négligeable devant les résistances couramment utilisées en TP d'électrocinétique ou d'électronique, de l'ordre du $k\Omega$.

La vitesse moyenne est donnée par $\vec{j} = \rho_m \vec{v} \Rightarrow v = \dfrac{j}{|\rho_m|} = \dfrac{I/s}{ne} = \dfrac{4I}{\pi d^2 ne}$

soit $\underline{v = 9{,}4\ \mu m.s^{-1} \approx 0{,}01\ mm.s^{-1}}$

Cette vitesse de dérive est, en norme, très faible devant la vitesse d'agitation thermique (de l'ordre de 100 $km.s^{-1}$).

La différence de potentiel à ses bornes est donnée par $\underline{U = RI = 0{,}9\ mV}$, ce qui est tout à fait négligeable en TP où les tensions sont de l'ordre de quelques volts.

La norme E du champ électrique qui lui est appliqué est donnée par :

$$U = EL \quad (\text{penser à } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V) \Rightarrow \underline{E = U/L = 2{,}2.10^{-3}\ V.m^{-1}}$$

Exercice 6

1. Voir cours.
2. a, b, c, d :

L'équation différentielle étant linéaire, on peut la résoudre en complexes en posant $\underline{\vec{v}} = \underline{V_m} \exp(i\omega t)\, \vec{u}_x$. Elle devient alors, en projection sur $\vec{u}_x$,

$$i\omega \underline{V_m} + \frac{1}{\tau}\underline{V_m} = \frac{q}{m} E_m \quad \Rightarrow \quad \underline{V_m} = \frac{\frac{q}{m}}{\frac{1}{\tau} + i\omega} E_m \quad \Rightarrow \quad \underline{J_m} = nq\underline{V_m} = \frac{n\frac{q^2}{m}}{\frac{1}{\tau} + i\omega} E_m .$$

En multipliant en haut et en bas par τ, on fait apparaître au numérateur la conductivité en régime stationnaire $\gamma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}$,

$$\boxed{\underline{\vec{j}_{\text{el}}} = \underline{\gamma}(\omega)\,\underline{\vec{E}} \quad \text{avec} \quad \underline{\gamma}(\omega) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\gamma_0}{1 + \mathrm{i}\,\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{1}{\tau} \simeq 4 \cdot 10^{13}\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}}\,.$$

La conductivité complexe $\underline{\gamma}(\omega)$ joue le rôle d'une fonction de transfert de type passe-bas d'ordre 1, avec pour pulsation de coupure ω_c. Cela correspond à la fréquence de coupure $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \simeq 1 \cdot 10^{13}$ Hz.