Document 1 : Invariances et symétries d'une distribution de charges

On note $\mathcal{D}$ une distribution dans l'espace de charges électriques (continue ou composée de charges ponctuelles).

> On peut envisager les transformations suivantes pour étudier ses **invariances** :
> – **Translation** : on dit que la distribution de charges $\mathcal{D}$ est invariante par translation suivant un axe Δ si elle reste inchangée [1]lorsqu'on la translate selon n'importe quel vecteur colinéaire à Δ.
> – **Rotation** : on dit que la distribution de charges $\mathcal{D}$ est invariante par rotation autour d'un axe Δ si elle reste inchangée lorsqu'on lui applique toute rotation d'angle quelconque autour de cet axe.
>
> On peut envisager les transformations suivantes pour étudier ses **symétries** :
> – **Symétrie plane** : un plan Π est un plan de symétrie pour la distribution de charges si à toute charge d'un côté de ce plan correspond une charge de l'autre côté, disposée de manière symétrique par rapport au plan, de même valeur et de même signe.
> – **Antisymétrie plane** : un plan Π^* est un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges si à toute charge d'un côté de ce plan correspond une charge de l'autre côté, disposée de manière symétrique par rapport au plan, de même valeur mais de signe opposé.

Questions :

a. En coordonnées cylindriques, proposer au moins une distribution de charges invariante par rotation autour de l'axe (Oz).

b. En coordonnées cartésiennes, on considère la distribution $\mathcal{D}$ de quatre charges suivantes : $+q$ en $A(1,0,0)$; $+q$ en $B(-1,0,0)$; $-q$ en $C(0,1,0)$ et $-q$ en $D(0,-1,0)$. Les positions sont en unités arbitraires. Déterminer le(s) plan(s) de symétrie et le(s) plan(s) d'antisymétrie.

Document 2 : Invariances et symétries du champ électrostatique

Les dépendances en coordonnées et la direction du champ électrostatique se déterminent grâce aux propriétés suivantes (à connaître !) :

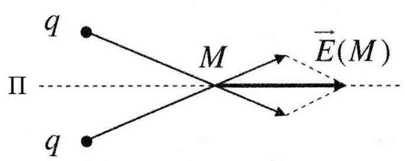
> **Invariances** : Si la distribution de charges est invariante suivant une coordonnée (par translation ou rotation), alors le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas de cette coordonnées.
> **Symétries** :
> – Si le plan Π contenant le point M est un plan de symétrie pour la distribution de charges alors le champ $\overrightarrow{E}(M)$ est contenu dans ce plan.
> – Si le plan Π^* contenant le point M est un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges alors le champ $\overrightarrow{E}(M)$ est orthogonal à ce plan.

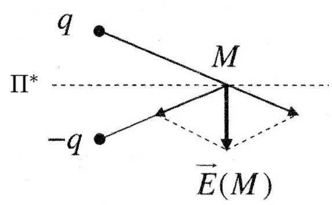
On peut se convaincre du deuxième point grâce aux deux schémas ci-dessous.

Ils présentent le cas d'une distribution de deux charges ponctuelles, mais le raisonnement se généralise pour un ensemble de plusieurs charges ponctuelles. En effet, s'il existe par exemple un plan de symétrie, le champ électrique total en M s'obtient par l'addition vectorielle (théorème de superposition) de tous les champs électriques créés par les charges d'un côté du plan et par les charges symétriques, ce qui donne bien un champ contenu dans le plan de symétrie (on raisonne par couples de charges).

Le raisonnement se généralise également pour une distribution continue de charges : on considère alors des couples de volumes infinitésimaux de charges « symétriques » ou « antisymétriques ».

1. C'est-à-dire qu'en tout point M de la distribution, on retrouve, après transformation, la même charge ou la même densité volumique de charge (même valeur et même signe).





Document 3 : Éléments d'analyse d'une carte de champ électrostatique

Les propriétés des opérateurs d'analyse vectorielle (en particulier du gradient), ainsi que les notions déjà abordées dans les précédents chapitres permettent d'établir le résumé encadré ci-dessous. Un bon exercice consiste à démontrer chaque affirmation.

On rappelle que les **lignes de champ** sont telles qu'en chacun de leur point M, le vecteur $\overrightarrow{E}$ leur est tangent. On rappelle en outre qu'une **surface équipotentielle** est définie par l'ensemble des points pour lesquels la valeur du potentiel électrostatique est constante ($V(M) = \text{cte}$).

- Les lignes de champ ne sont pas des courbes fermées dans le cas du champ électrostatique : loin des sources elles se « dirigent » vers l'infini. Cette propriété permet de distinguer une carte de champ électrostatique d'une carte de champ magnétique (dans cette dernière, les lignes de champ sont fermées [2]).
- Les lignes de champ électrostatique divergent à partir des charges positives et convergent vers les charges négatives.
- Deux lignes de champ distinctes ne peuvent se couper excepté en un point de champ nul.
- Les surfaces équipotentielle sont en tout point de l'espace orthogonales aux lignes de champ. On peut en déduire les unes connaissant les autres.
- Les lignes de champ sont orientées vers les potentiels décroissants.
- La norme du champ électrostatique $||\overrightarrow{E}||$ est plus grande dans les zones de l'espace où les lignes de champ sont resserrées.
- On peut évaluer une valeur moyenne d'un champ électrique sur une carte d'équipotenielles en approximant le gradient à un taux d'accroissement spatial : $||\overrightarrow{E}|| = ||-\overrightarrow{\text{grad}}(V)|| \approx \left|\frac{V_A - V_B}{d_{AB}}\right|$, où V_A et V_B sont les valeurs du potentiel au niveau de deux équipotentielles successives, et d_{AB} la distance qui sépare ces équipotentielles.

Questions :

a. Dans les deux cartes de champ suivantes, indiquer les lignes de champ et les équipotentielles.

b. Indiquer les zones de champ intense.

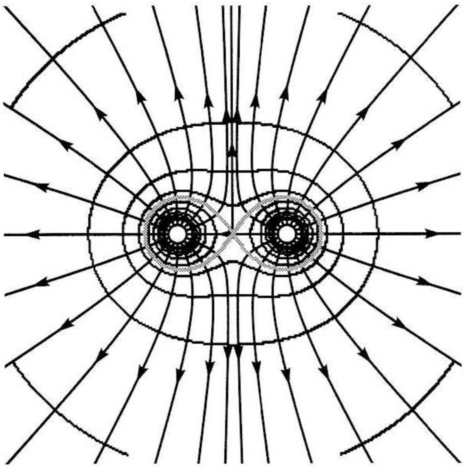
c. Indiquer les charges et leur signe.

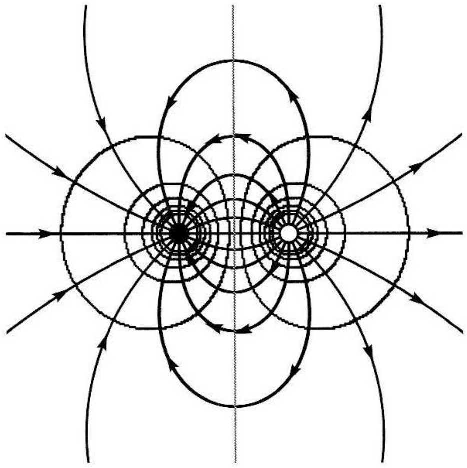
d. Indiquer un point de champ nul.

e. Sur la carte de gauche, attribuer le potentiel V_1 à une des surfaces équipotentielles, et indiquer dans ce cas une surface équipotentielle de potentiel $V_2 > V_1$.

f. Indiquer un plan de symétrie pour la carte de gauche, et d'antisymétrie pour la carte de droite.

2. Voir le chapitre EM3.





Document 4 : Méthode pour appliquer le théorème de Gauss

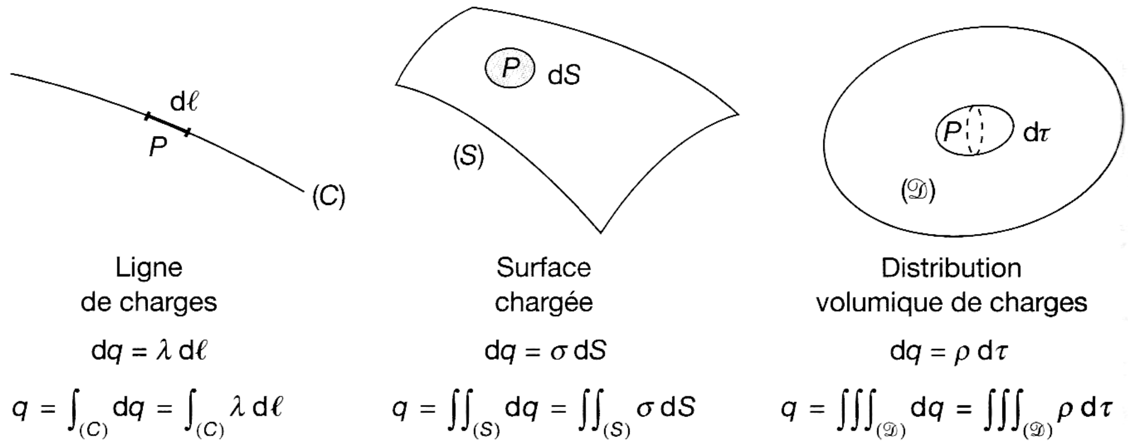
Un soin particulier doit être apporté lors de la rédaction d'une question pour laquelle on doit exprimer un champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss. On respectera les étapes suivantes pour ce faire.

On cherche à déterminer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en un point M de l'espace.

1. **Système de coordonnées** : le choisir de manière à respecter les symétries de la distribution de charge.
2. **Invariances** : faire la liste des invariances de la distribution de charges pour en déduire les invariances du champ électrique suivant une ou plusieurs coordonnées.
3. **Symétries** : faire la liste des symétries de la distribution de charges (plans de symétrie, plan d'antisymétrie) pour en déduire la direction du champ électrique, suivant un ou plusieurs vecteurs de la base choisie. Attention : les plans utilisés doivent contenir le point M !
4. **Surface de Gauss** : critères pour la choisir correctement :
   - elle doit contenir le point M ;
   - elle doit être fermée ;
   - elle peut être la réunion de surfaces orientées différemment ;
   - afin de simplifier au maximum les calculs on la (ou les) choisit de manière à ce qu'en un point P de la surface le champ $\overrightarrow{E}(P)$ soit ou *perpendiculaire*, ou *tangent* au vecteur surface élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{S_P}$. Dans ce dernier cas, le calcul se simplifie grandement si la norme de $\overrightarrow{E}(P)$ est constante sur la surface.
5. **Flux du champ électrostatique** $\Phi_{(S)} = \iint_{(S)} \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{S}$: on calcule l'intégrale pour l'exprimer.
6. **Charge intérieure** $Q_{\text{int}} = \iiint_{(V)} \rho \mathrm{d}\tau$: on calcule l'intégrale. Attention : il est parfois nécessaire de distinguer plusieurs cas selon le point de l'espace où l'on cherche à exprimer le champ électrostatique.
7. **Théorème de Gauss** $\Phi_{(S)} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$: l'égalité permet d'exprimer $\overrightarrow{E}(M)$.

Document 5 : Trois modèles de distributions de charges

Dans certaines situations la modélisation d'une distribution de charges par une densité volumique n'est pas la plus pertinente. On envisage ici deux autres descriptions, qui peuvent se révéler plus pratiques selon le contexte physique.



Il faut voir les distributions surfaciques ou linéiques comme des cas limites de distributions volumiques pour lesquelles on fait tendre une ou deux dimensions vers zéro. On retiendra :

Pour une distribution linéique de charges, la **densité linéique de charges** λ (en $\mathrm{C.m^{-1}}$) s'écrit :

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}.$$

Pour une distribution surfacique de charges, la **densité surfacique de charges** λ (en $\mathrm{C.m^{-2}}$) s'écrit :

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}.$$

Pour une distribution volumique de charges, la **densité volumique de charges** λ (en $\mathrm{C.m^{-3}}$) s'écrit :

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}.$$

Document 6 : Champ disruptif de l'air

Lors d'orages, les nuages ont tendance à s'électriser, c'est-à-dire former des zones chargées positivement et négativement. Ils constituent des condensateurs « géants ». Si le champ électrique créé est assez élevé, l'air peut s'ioniser pour former un plasma et devenir conducteur d'électricité. Les courants créés sont ce qu'on appelle la « foudre ». On retiendra :

> **Champ disruptif de l'air** : champ électrique minimal nécessaire pour ioniser l'air et le rendre conducteur. Ordre de grandeur : $E \sim 10^6$ V.m^{-1}.

Document 7 : Champ créé par une boule uniformément chargée

On considère une boule de rayon R, uniformément chargée, de densité volumique de charges ρ, de charge totale Q ($Q = \rho.V = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$ dans ce cas). Alors :

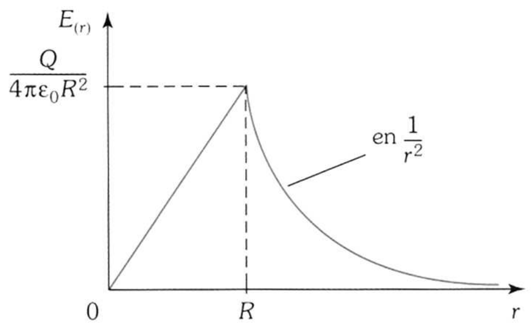
– pour $r \leq R$:

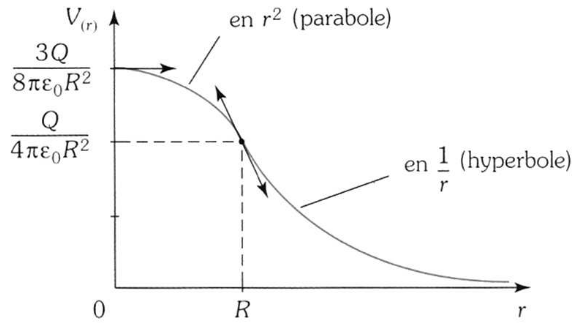
$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3R^2 - r^2) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2).$$

– pour $r \geq R$:

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

L'allure du champ et du potentiel est représentée ci-dessous :





Document 8 : Analogies entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel

Les lois d'interactions de Newton et de Coulomb étant quasi-identiques (à la seule différence qu'il n'existe pas de masse négative, donc que la gravitation est attractive et s'exerce toujours dans le même sens), on peut transposer la quasi-totalité des résultats de l'électrostatique à la gravitation avec la correspondance :

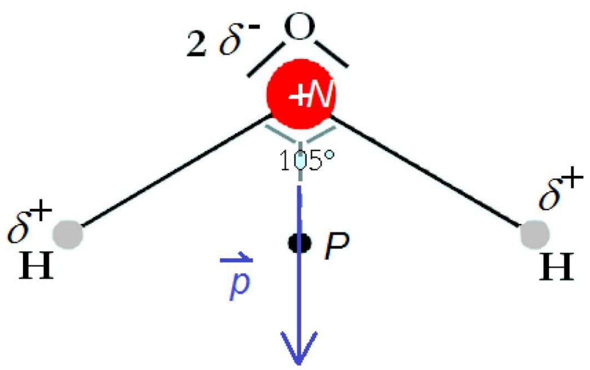
$$\overrightarrow{F_{AB}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\overrightarrow{u_{AB}} \iff \overrightarrow{F_{AB}} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\overrightarrow{u_{AB}}$$

Soit : $q \iff m$ et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iff -G$.

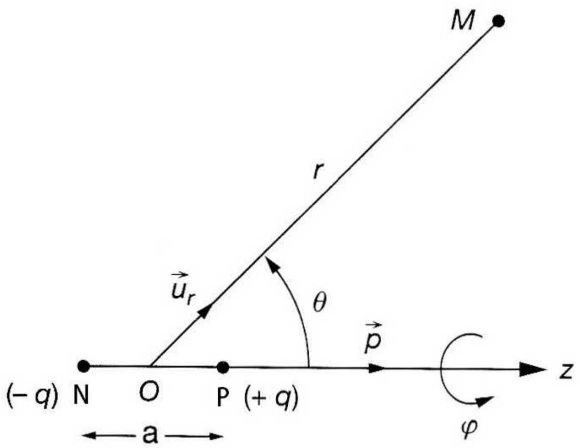
Explicitement, on retrouvera en gravitation les résultats suivants (noter l'analogie) :

	Électrostatique	Gravitation
Sources de champ	Charges fixes	Masses
Champ défini à partir d'une loi de force	$\vec{F} = q\,\vec{E}$	$\vec{F} = m\,\vec{\mathcal{G}}$
Champ à partir de sa source (indice 0)	Loi de Coulomb $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\dfrac{q_0}{r^2}\vec{u}$	Loi de Newton $\vec{\mathcal{G}} = -G\,\dfrac{m_0}{r^2}\vec{u}$
Circulation conservative (le champ dérive d'un *potentiel scalaire*)	$\oint \vec{E}\cdot\overrightarrow{d\ell} = 0$ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel électrostatique $V = \dfrac{q}{4\pi\,\varepsilon_0\,r}$ (charge ponctuelle)	$\oint \vec{\mathcal{G}}\cdot\overrightarrow{d\ell} = 0$ $\vec{\mathcal{G}}$ dérive d'un potentiel gravitationnel $V = -G\,\dfrac{m}{r}$ (masse ponctuelle)
Flux non conservatif (relie le champ à ses *sources*)	$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS_e} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ (Th. de Gauss)	$\oiint_{(\Sigma)} \vec{\mathcal{G}}\cdot\overrightarrow{dS_e} = -4\pi\,G\,M_{\text{int}}$ (Th. de Gauss)

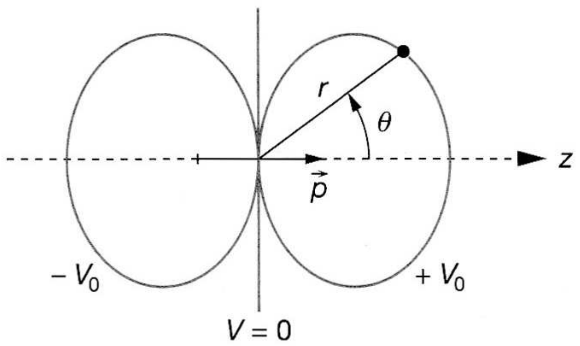
Document 9 : Un exemple de dipôle : la molécule d'eau



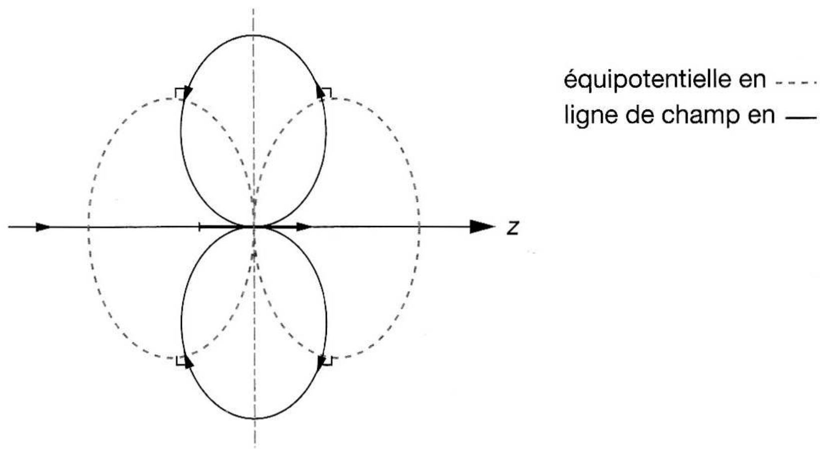
Document 10 : Notations pour le calcul du potentiel V



Document 11a : Dipôle électrostatique – allure des équipotentielles

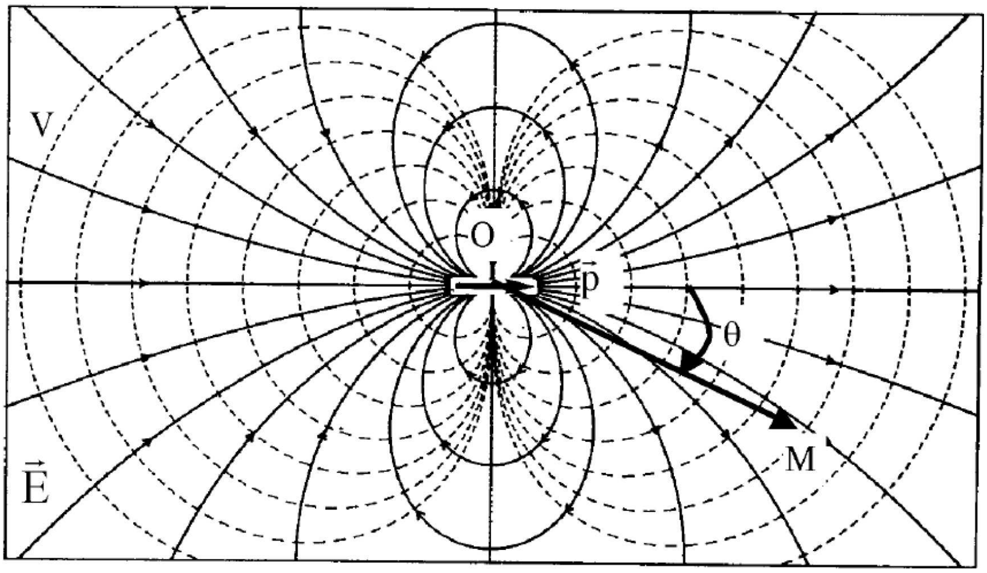


Document 11b : Dipôle électrostatique – allure des lignes de champ



Document 11c : Dipôle électrostatique – topographie globale des lignes de champ et équipotentielles

Dans le cadre de l'approximation dipolaire. Les équipotentielles sont en pointillées et les lignes de champ en traits pleins.



Questions :

1. Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est-il isotrope ? Même question pour un dipôle électrostatique. Justifier.
2. Comment faudrait-il orienter une molécule d'eau placée en O pour que le champ électrostatique produit corresponde à celui de la carte ci-dessus ?
3. Quelle serait l'allure de la carte de champ dans le plan contenant (Oz) et perpendiculaire à cette feuille ?

Document 12 : Solvatation d'un cation dans un solvant polaire (comme l'eau)