

Révisions de PCSI sur

Espaces préhilbertiens réels

Et

Espaces Euclidiens

Table des matières

1	Produit scalaire et Norme associée	3
1.1	Définition et conséquences	3
1.2	Exemples Classiques	4
1.2.1	Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$	4
1.2.2	Produit scalaire canonique sur un espace de dimension finie	4
1.2.3	Produit scalaire canonique sur l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$	4
1.2.4	Norme de la convergence en moyenne quadratique	5
2	Orthogonalité	5
3	Bases orthonormales d'un espace euclidien	6
4	Supplémentaires orthogonaux	7
5	Projecteur orthogonal sur un sev de dimension finie	8
6	Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	8
7	Distance d'un vecteur à un s.e.v	9
8	Formes linéaires sur un espace euclidien	10

On présente ici les essentiels à connaître sur les espaces préhilbertiens réels et euclidiens.

1 Produit scalaire et Norme associée

1.1 Définition et conséquences

Définition 1. : Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

On appelle *produit scalaire sur E* , toute application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $<, >$, $(/)$ ou $.$ telle que :

- $\forall (x, y) \in E \times E, < x, y > = < y, x >$. On dit que $<, >$ est symétrique.
- $\forall x \in E, y \mapsto < x, y >$ est linéaire. On dit que $<, >$ est linéaire à droite.
- $\forall y \in E, x \mapsto < x, y >$ est linéaire. On dit que $<, >$ est linéaire à gauche.
- $\forall x \in E, < x, x > \geq 0$. On dit que $<, >$ est positive.
- $\forall x \in E, < x, x > = 0 \iff x = 0$. On dit que $<, >$ est définie.

On appelle *espace préhilbertien réel*, tout $\mathbb{R}$ -ev E muni d'un produit scalaire φ et $\varphi(x, y)$ est plutôt noté $< x, y >$ ou (x/y) .

On appelle *espace euclidien*, tout $\mathbb{R}$ -ev E de dimension finie muni d'un produit scalaire

Propriété 1. : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, < >)$ un espace préhilbertien réel,

$$\forall (x, y) \in E \times E, | < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >} \sqrt{< y, y >}$$

L'égalité a lieu si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Propriété 2. : : Soit $(E, < >)$ un espace préhilbertien réel.

$x \mapsto \sqrt{< x, x >}$ est une norme sur E . On l'appelle *norme associée au produit scalaire de E* ou *norme euclidienne* et on la note $\| \cdot \|$.

Remarque 1. : L'inégalité de Cauchy Schwarz devient donc :

$$\forall (x, y) \in E \times E, | < x, y > | \leq \|x\| \|y\|$$

Définition 2. : Un vecteur x d'un espace préhilbertien est appelé, *vecteur normal ou unitaire*, lorsque $\|x\| = 1$.

Remarque 2. : Lorsque $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|}$ est un vecteur unitaire.

Théorème 1. : On retiendra les relations suivantes :

1. $\forall (x, y) \in E \times E, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >.$

2. Identité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

3. Identités de Polarisation : $\forall (x, y) \in E \times E,$

$$\begin{aligned} < x, y > &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \end{aligned}$$

Savoir retrouver ces relations

1.2 Exemples Classiques

1.2.1 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle, produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire :

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto X^T Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Ce qui donne la norme euclidienne : $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz associée : $\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

On remarque que pour $n = 1$, on retrouve la multiplication et pour $n = 2$, la formule que vous connaissez depuis la 1ère.

Savoir justifier que $\langle, \rangle$ est un produit scalaire :

1.2.2 Produit scalaire canonique sur un espace de dimension finie

Soit E un espace de dimension finie n , soit $b = (e_i)_i$ une base.

Alors, on définit de manière analogue à celui de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire sur E :

$$\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{i=1}^n y_i e_i) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Ce qui donne la norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

En particulier :

1. Pour $\mathbb{R}_n[X]$ muni de sa base canonique

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i \text{ où } P = \sum_{i=0}^n a_i X^i, Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$$

2. Pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique composée des matrices élémentaires

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \text{ où } A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$\text{Remarquons que : } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ij} \right) = \text{tr} (A^T B).$$

Il faut savoir démontrer directement que $\langle, \rangle : (A, B) \mapsto \text{tr} (A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sans passer par la notion de produit scalaire canonique :

Démo :

1.2.3 Produit scalaire canonique sur l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$,

Alors $\langle, \rangle : (f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire.

Norme associée : $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$

Inégalité de Cauchy-Schwarz associée : $\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$

A savoir faire

1.2.4 Norme de la convergence en moyenne quadratique

Définition 3. Soit f continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
 f est dite **de carré intégrable sur I** lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I .

On note $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

$\langle, \rangle : (f, g) \mapsto \int_I fg$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$.

L'application $N_2 : f \mapsto \sqrt{\int_I f^2}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$. Elle est appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique**.

2 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v préhilbertien de produit scalaire $\langle, \rangle$.

Définition 4. 1. Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.

2. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite

(a) orthogonale si $\forall (i, j) \in I \times I, i \neq j \implies \langle u_i, u_j \rangle = 0$.

(b) orthonormale ou orthonormée si $\forall (i, j) \in I \times I, i \neq j \implies \langle u_i, u_j \rangle = 0$
 et $\langle u_i, u_i \rangle = 1$.

3. Soit F un s.e.v de E .

(a) Soit $x \in E$. On dit que x est *orthogonal* à F si : $\forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0$.

(b) On appelle *orthogonal de F* , qu'on note $F^\perp$, la partie de E :

$$F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$$

4. Soit F et G deux s.e.v de E .

F et G sont dits s.e.v orthogonaux lorsque :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \langle x, y \rangle = 0$$

et on note $F \perp G$

Propriété 3. 1. Soit F un s.e.v de E . $F^\perp$ est un s.e.v de E et $F \cap F^\perp = \{0\}$ (i.e $F + F^\perp$ est une somme directe).

2. Soit F un s.e.v de E de dimension finie, muni d'une base $(f_i)_{i \in \{1..p\}}$.

Alors

$$F^\perp = \{x \in E / \forall i \in \{1..p\}, \langle x, f_i \rangle = 0\}$$

3. Soit F et G deux s.e.v de E .

F et G sont orthogonaux ssi $F \subset G^\perp$.

F et G sont orthogonaux ssi $G \subset F^\perp$.

4. $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Théorème de Pythagore :

Soit E est un préhilbertien réel,

1. $\forall (x, y) \in E \times E, \langle x, y \rangle = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

2. Soit une famille finie orthogonale $(x_i)_{i \in \{1..n\}}$ de E .

Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

3 Bases orthonormales d'un espace euclidien

Propriété 4. : Toute famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.

Justification : Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille orthogonale finie de vecteurs non nuls.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tq $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0_E$.

Soit $k \in \llbracket 1..p \rrbracket$

$$\langle v_k, \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \rangle = \langle v_k, 0_E \rangle = 0$$

Par linéarité à droite de $\langle, \rangle$,

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \langle v_k, v_i \rangle = 0$$

Par hyp d'orthogonalité, $\langle v_k, v_i \rangle = 0$ pour $i \neq k$. Ainsi, la relation devient :

$$\lambda_k \langle v_k, v_k \rangle = 0$$

$v_k \neq 0_E \iff \langle v_k, v_k \rangle \neq 0$. Ainsi : $\lambda_k = 0$.

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 1..p \rrbracket, \lambda_k = 0$. Ainsi $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

Exemple d'application : Montrer que :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour $(i, j) \in \llbracket 1..n \rrbracket^2$, $\int_0^\pi \sin(it) \sin(jt) dt$.
2. En déduire que $(f_i)_{i \in \llbracket 1..n \rrbracket}$ où $f_i : t \mapsto \sin(it)$ est libre.

Corollaire : Soit E un espace euclidien de dimension n .

Toute famille orthogonale finie $(x_i)_{i \in \{1..n\}}$ de vecteurs non nuls de E est une base de E .

Définition 5. : Soit E un espace euclidien de dimension n .

On appelle *base orthogonale* (resp : *base orthonormale*) de E , toute famille orthogonale (resp : orthonormale) de n vecteurs non nuls de E .

On note b.o.n pour une base orthonormale.

Propriété 5. : Soit E muni d'une b.o.n $(e_i)_{i \in \{1..n\}}$. On a :

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i = \begin{pmatrix} \langle e_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, x \rangle \end{pmatrix}$$

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

où $x_i = \langle e_i, x \rangle$.

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

où $x_i = \langle e_i, x \rangle$ et $y_i = \langle e_i, y \rangle$.

Finalement, le produit scalaire associé à cette b.o.n se comporte comme le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Justification : Soit $x \in E$. Il se décompose dans la base $(e_i)_{i \in \{1..n\}}$. C'est-à-dire, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

$$\forall i \in \llbracket 1..n \rrbracket, \langle x, e_i \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \langle e_k, e_i \rangle \underset{(e_k)_k \text{ orthogonale}}{=} x_i \langle e_i, e_i \rangle \underset{(e_k)_k \text{ orthonormée}}{=} x_i$$

$\forall (x, y) \in E \times E,$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n x_k \left(\sum_{i=1}^n y_i \langle e_i, e_k \rangle \right) \stackrel{(e_k)_k \text{ orthonormée}}{=} \sum_{k=1}^n x_k (y_k) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

4 Supplémentaires orthogonaux

Soit E un espace préhilbertien réel.

Définition 6. : Soit F un s.e.v de E .

Lorsque $F \oplus F^\perp = E$, on dit que $F^\perp$ est un supplémentaire orthogonal de F dans E .

Propriété 6. : Soit E un espace euclidien.

Pour tout sev F de E , on a :

$$E = F \oplus F^\perp$$

Démo : Soit E de dim n .

Si $F = \{0\}$ alors $F^\perp = \{x \in E / \langle x, 0 \rangle = 0\} = E$ alors on a bien $F \oplus F^\perp = E$.

Si $F = E$ alors $E^\perp = \{x \in E / \forall y \in E, \langle x, y \rangle = 0\}$.

Soit $x \in E^\perp$, alors par déf de $E^\perp$, $\forall y \in E, \langle x, y \rangle = 0$. En particulier pour $y = x$, d'où $\langle x, x \rangle = 0$ ce qui implique $x = 0$. D'où $E^\perp = \{0\}$ et on a encore $F \oplus F^\perp = E$.

Supposons maintenant $\dim F = p \in \{1, \dots, n-1\}$ et soit $(f_i)_{i \in \{1 \dots p\}}$ une base de F .

On définit l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : E &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\mapsto (\langle x, f_1 \rangle, \dots, \langle x, f_p \rangle) \end{aligned}$$

Ψ est linéaire, $\text{Ker}(\Psi) = \{x \in E / \forall i \in \{1, \dots, p\}, \langle x, f_i \rangle = 0\} = F^\perp$ et $\text{Im}(\Psi) \subset \mathbb{R}^p$ donc $\text{rg}(\Psi) \leq p = \dim F$.

Par théorème du rang,

$\dim E = \dim F^\perp + \text{rg}(\Psi) \leq \dim F^\perp + \dim F = \dim(F^\perp + F)$ car $F \cap F^\perp = \{0\}$.

D'autre part, $F + F^\perp \subset E$ donc $\dim(F^\perp + F) \leq \dim E$.

D'où $\dim E = \dim(F^\perp + F)$. D'où $E = F^\perp + F$ car on a une inclusion et l'égalité des dimensions.

Enfin, $F \cap F^\perp = \{0\}$. Ainsi $F \oplus F^\perp = E$.

Corollaire 1 : Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormale.

Démo : Récurrence sur $n = \dim E$

Corollaire 2 : Soit E un espace préhilbertien réel.

Soit F un sev de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$.

Démo :

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ car si $x \in F \cap F^\perp$, alors $\langle x, x \rangle = 0$ puisque $x \in F$ et $x \in F^\perp$. Puis $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$.*
- Soit F un sev de dimension finie, on peut le considérer comme espace euclidien puisqu'il est muni d'un produit scalaire (celui de E) et est de dimension finie. Par le corollaire précédent, F admet une b.o.n. Notons-la $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$. Pour $x \in E$, on peut écrire :*

$$(1) x = \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k + \left(x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \right)$$

On a : $\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \in F$ et

$$\forall j \in \llbracket 1..p \rrbracket, \langle f_j, x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \rangle = \langle f_j, x \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle \langle f_j, f_k \rangle$$

$\langle f_j, f_k \rangle = 0$ pour $j \neq k$ et $\langle f_j, f_j \rangle = 1$, alors

$$\forall j \in \llbracket 1..p \rrbracket, \langle f_j, x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \rangle = \langle f_j, x \rangle - \langle x, f_j \rangle = 0$$

Ceci signifie que $x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \in F^\perp$. (1) montre ainsi $E \subset F \oplus F^\perp$. l'autre inclusion est immédiate, d'où le résultat.

5 Projecteur orthogonal sur un sev de dimension finie

Définition 7. : Soit F un sev de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E .
Le projecteur $p : E \rightarrow E$ tel que $\ker p = F^\perp$ et $\text{Im } p = F$ est appelé *projecteur orthogonal sur F* , noté p_F .

On rappelle que :

- $\forall x \in E, p_F(x) \in F, (x - p_F(x)) \in F^\perp$
- $\forall x \in E, x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$
- $\text{Im } p = F = \{x / p_F(x) = x\}$
- $\forall x \in E, \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$

Propriété 7. : Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit F un sev de dimension finie, muni d'une b.o.n $(f_i)_{i \in \{1..p\}}$.
Alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle f_i, x \rangle f_i$$

Démo : Cf démo du corollaire du paragraphe précédent

Propriété 8. : Inégalité de Bessel
Soit F un sev de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E , muni d'une b.o.n $(f_i)_{i \in \{1..p\}}$.

$$\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$$

C'est-à-dire encore,

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^p |\langle f_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Démo : On a $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ avec $(p_F(x), (x - p_F(x)))$ deux vecteurs orthogonaux. Alors par le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$. Cqfd

A retenir : deux méthodes pour obtenir $p_F(x)$:

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit la droite (D) d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.
Déterminer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal p sur la droite (D) .
2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x) dx$. Déterminer $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$.

6 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 2. : Soit E un préhilbertien réel.
Pour toute famille finie libre $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, il existe une famille orthogonale (donc libre aussi) $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que : $\forall i \in \{1..n\}, \text{vect}(x_1, \dots, x_i) = \text{vect}(y_1, \dots, y_i)$.

Démonstration :

On fait une récurrence sur le nombre de vecteurs de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

1. Pour $n = 1$: pour avoir $\text{vect}(x_1) = \text{vect}(y_1)$, on doit prendre $y_1 = \lambda x_1$ et toute famille à un vecteur est considérée comme orthogonale.

2. Supposons la relation de récurrence vraie au rang n et considérons une famille libre de $n+1$ vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$:

Par hypothèse de récurrence, il existe une famille orthogonale $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que : $\forall i \in \{1..n\}, \text{vect}(x_1, \dots, x_i) = \text{vect}(y_1, \dots, y_i)$.

On cherche y_{n+1} tel que $(y_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ soit orthogonale et $\text{vect}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \text{vect}(y_1, \dots, y_{n+1})$.

Analyse : Soit $\forall i \in \{1..n+1\}, H_i = \text{vect}(x_1, \dots, x_i)$.

On veut $y_{n+1} \in (H_n)^\perp \cap H_{n+1}$.

On a $H_{n+1} = H_n \oplus \mathbb{K}x_{n+1}$.

Donc y_{n+1} se décompose sous la forme : $y_{n+1} = z_n + \lambda x_{n+1}$ où $z_n \in H_n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Puisque $y_{n+1} \in (H_n)^\perp$ et $y_{n+1} - z_n = \lambda x_{n+1}$, on peut écrire que $y_{n+1} = p_{(H_n)^\perp}(\lambda x_{n+1}) = \lambda x_{n+1} - p_{(H_n)}(\lambda x_{n+1}) = \lambda(x_{n+1} - p_{(H_n)}(x_{n+1}))$.

Synthèse : Posons $y_{n+1} = x_{n+1} - p_{(H_n)}(x_{n+1})$.

On a : $\text{vect}(y_1, \dots, y_{n+1}) = \text{vect}(x_1, \dots, x_{n+1} - p_{(H_n)}(x_{n+1})) = \text{vect}(x_1, \dots, x_{n+1})$, car $p_{(H_n)}(x_{n+1}) \in H_n$.

$x_{n+1} - p_{(H_n)}(x_{n+1}) \in (H_n)^\perp = (\text{vect}(x_1, \dots, x_n))^\perp = (\text{vect}(y_1, \dots, y_n))^\perp$ donc $(y_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ soit orthogonale.

c.q.f.d

En pratique, on retient de la démo précédente qu'on cherche y_n de la forme :

$$y_n = x_n - p_{H_{n-1}}(x_n)$$

Or $H_{n-1} = \text{vect}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \text{vect}(y_1, \dots, y_{n-1})$ donc $p_{H_{n-1}}(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i$ où les λ_i sont des scalaires qu'on détermine en écrivant : $\langle y_n, y_j \rangle = 0$ pour tout $j = 1 \dots n-1$.

C'est-à-dire :

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2 + \lambda_1 y_1 \text{ où } \lambda_1 \text{ est telle que : } \langle y_2, y_1 \rangle = 0.$$

$$y_3 = x_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ où } \lambda_1 \text{ est telle que : } \langle y_3, y_1 \rangle = 0 \text{ et où } \lambda_2 \text{ est telle que : } \langle y_3, y_2 \rangle = 0.$$

etc.....

Corollaire : Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Pour toute famille finie libre $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, il existe une famille orthonormale (donc libre aussi) $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que : $\forall i \in \{1..n\}, \text{vect}(x_1, \dots, x_i) = \text{vect}(y_1, \dots, y_i)$.

En pratique : On part d'une famille finie libre $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$$1. \text{ Le premier vecteur de ma future b.o.n est : } y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

2. On cherche le second vecteur en deux étapes :

(a) On cherche un vecteur y'_2 sous la forme $y'_2 = x_2 + \lambda_1 y_1$ où λ_1 est telle que : $\langle y'_2, y_1 \rangle = 0$, ce qui donne une seule valeur possible pour λ_1 .

(b) On normalise le vecteur obtenu et ce vecteur devient le second vecteur de ma future bon : $y_2 = \frac{y'_2}{\|y'_2\|}$

3. On cherche le troisième vecteur en deux étapes :

(a) On cherche un vecteur y'_3 sous la forme $y'_3 = x_3 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ où λ_1 est telle que : $\langle y'_3, y_1 \rangle = 0$ et où λ_2 est telle que : $\langle y'_3, y_2 \rangle = 0$ ce qui donne les valeurs de λ_i .

(b) On normalise le vecteur obtenu et ce vecteur devient le troisième vecteur de ma future bon : $y_3 = \frac{y'_3}{\|y'_3\|}$

etc.....

Exemples :

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit la droite (D) d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$. Déterminer une b.o.n de $D^\perp$.
2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x) dx$. Déterminer une b.o.n de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$.

7 Distance d'un vecteur à un s.e.v

Définition 8. : Soit E un préhilbertien réel.

Soient $x \in E$ et F un s.e.v

On appelle, *distance de x à F* , noté $d(x, F)$, le réel positif défini par :

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\| / y \in F\}$$

Propriété 9. :

1. L'ensemble $\{y \in F / d(x, F) = \|x - y\|\}$ a au plus un élément.

2. Soit $x_0 \in F$

$$d(x, F) = \|x - x_0\| \iff x - x_0 \in F^\perp$$

3. Si F est de dimension finie, $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et $(d(x, F))^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.

8 Formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème de représentation des formes linéaires : Soit f une forme linéaire sur un espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle, \rangle$. Alors, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, f(x) = \langle a, x \rangle$$

Autrement dit, en dimension finie, toute forme linéaire est représentée par un produit scalaire.

Démo :

Remarque 3. Soit f une forme linéaire non nulle, l'unique vecteur a tel que $\forall x \in E, f(x) = \langle a, x \rangle$ est orthogonal à l'hyperplan $H = \ker(f)$ puisque $\forall x \in H, \langle x, a \rangle = 0$. Plus généralement, les vecteurs colinéaires à a sont les vecteurs orthogonaux de H . On dit aussi **vecteurs normaux** de H .