Cinématique ; énergétique

Exercice 1 : Systèmes de coordonnées et cinématique
Dans un premier temps, si besoin, vous pouvez faire cet exercice en vous aidant des documents 3 et 4 du cours. Mais par la suite il faut absolument savoir le refaire seul !

1. *Coordonnées cartésiennes*
   (a) Dessiner un repère en coordonnées cartésiennes en faisant apparaître l'origine O, les coordonnées x, y et z d'un point M quelconque, ainsi que les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$.
   (b) Donner l'expression du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ dans ce système de coordonnées.
   (c) Quel est le lien entre vecteur-vitesse $\overrightarrow{v}$ et vecteur-position ? Entre vecteur-accélération $\overrightarrow{a}$ et vecteur-vitesse ?
   (d) En déduire les expression de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ en fonction de $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ dans ce système de coordonnées.
2. *Coordonnées polaires / cylindriques*
   (a) Dessiner un repère en coordonnées cylindriques en faisant apparaître l'origine O, un point M quelconque, son projeté orthogonal H sur le plan (xOy) les coordonnées r, θ et z du point M, les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$, ainsi que les vecteurs de la base locale associée à M : $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_z}$.
   (b) Que représentent r et z dans ces coordonnées ? L'angle θ est l'angle formé par quels vecteurs unitaires ?
   (c) En remarquant que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ (relation de Chasles), donner l'expression du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs de la base locale.
   (d) Qu'appelle-t-on « coordonnées polaires » ?
   (e) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et en fonction des vecteurs unitaires de la base cartésienne (faire un schéma en 2D si besoin).
   (f) En utilisant le document 3 du cours, montrer que $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$, avec $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.
   (g) Montrer alors que le vecteur-vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$ puis que le vecteur-accélération s'écrit $\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$ en coordonnées cylindriques.
3. *Coordonnées sphériques*
   (a) Dessiner un repère en coordonnées sphériques en faisant apparaître l'origine O, un point M quelconque, son projeté orthogonal H sur le plan (xOy) les coordonnées r, θ et ϕ du point M, les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$, ainsi que les vecteurs de la base locale associée à M : $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_\phi}$.
   (b) Que représente r dans ces coordonnées ? L'angle θ est l'angle formé par quels vecteurs ? Et l'angle ϕ ?
   (c) Quelle est l'expression (très simple) de $\overrightarrow{OM}$ dans ces coordonnées ?

Exercice 2 : Déplacements élémentaires et énergies potentielles
On appelle déplacement élémentaire (ou infinitésimal) le vecteur $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$ lorsque M et M' sont infiniment proches. En règle générale ce vecteur est noté $\mathrm{d}\overrightarrow{l}$ ou $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

1. (a) A l'aide d'un schéma, montrer qu'en coordonnées cartésiennes le déplacement élémentaire s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$.

(b) Exprimer $\mathrm{d}E_P$, puis retrouver l'expression (en intégrant) de l'energie potentielle E_P associée aux trois forces conservatives suivantes (voir document 6 du cours) : poids ; force de rappel d'un ressort ; force électrostatique associée à un champ électrique uniforme.

2. Montrer qu'en coordonnées cylindriques le déplacement élémentaire s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$. Pour faciliter la visualisation on pourra notamment faire un schéma en coordonnées polaires (2D).

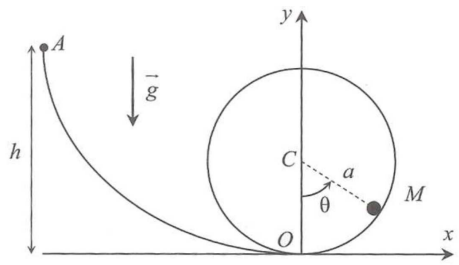
3. (a) En coordonnées sphériques le déplacement élémentaire s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\phi\overrightarrow{u_\phi}$. Comprendre l'origine de chacun des trois termes en faisant par exemple deux schémas en 2D, dans les plans (MHO) et (xOy).

   (b) Exprimer $\mathrm{d}E_P$, puis retrouver l'expression de l'energie potentielle E_P associée aux deux forces conservatives suivantes : force gravitationnelle exercée par un astre ponctuel ; force électrostatique exercée par une charge ponctuelle.

Théorèmes de base ; portrait de phase

Exercice 3 : Looping

Un skater assimilé à un point matériel M de masse m se lâche sans vitesse initiale depuis le point A d'une rampe, situé à une hauteur h au-dessus de O, point le plus bas de la rampe. À partir de O la rampe a une forme cylindrique de rayon a : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical (Oxy), et éventuellement faire le tour complet. Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces.



On note $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_y}$ l'accélération de la pesanteur, et on désigne par $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}$ le vecteur unitaire radial par rapport au cercle.

1. Déterminer l'expression de la norme v_0 de la vitesse du skater lorsqu'il arrive au point O.
2. Déterminer l'expression de la norme v de la vitesse du skater en un point quelconque du cercle, repéré par l'angle θ.
3. Montrer que la réaction du support exercée par le support cylindrique sur le skater est :

$$\overrightarrow{R} = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\overrightarrow{e_r}.$$

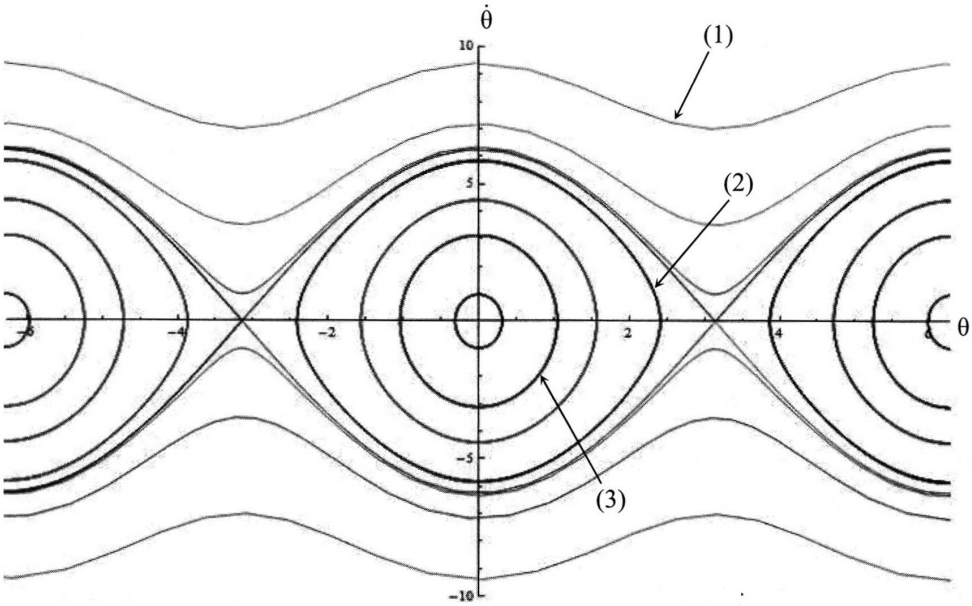
4. (a) Que se passe-t-il si, en un certain point du cylindre, v s'annule avec R non nulle ? (Répondre sans calcul.)

   (b) Que se passe-t-il si c'est la réaction R qui s'annule avec v non nulle ? (Répondre sans calcul.)

5. Déterminer la valeur minimale que doit avoir la hauteur h pour que le skater puisse faire un tour complet du cylindre.

Exercice 4 : Portrait de phase d'un pendule simple
Un pendule simple est constitué d'un point matériel M, de masse m, lié à l'extrémité d'un fil de longueur L, l'autre extrémité étant fixe en un point O. On suppose que le mouvement a lieu dans le plan vertical (xOy), l'axe (Ox) étant dirigé vers le bas. On repère la position de M avec l'angle polaire θ.

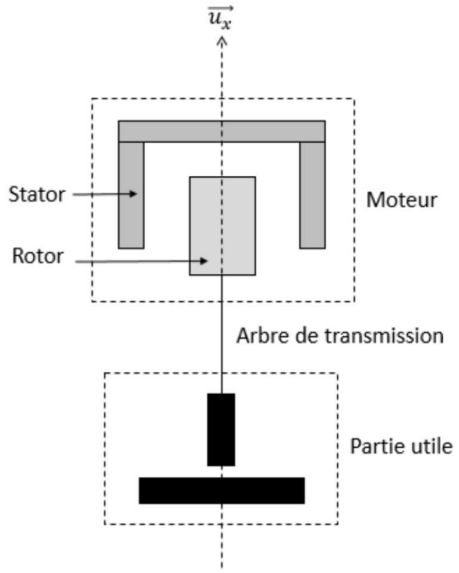
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ d'au moins deux manières différentes.
2. En déduire l'intégrale première du mouvement : $\dot{\theta}^2 - \frac{2g}{L}\cos(\theta) = cte$. De quoi dépend la constante ?
3. Le portrait de phase est constitué de courbes ayant l'équation ci-dessus, pour différentes valeurs de la constante. Son allure est la suivante (avec θ en rad et $\dot{\theta}$ en rad/s) :



   (a) À quel type de mouvement correspond la courbe (1) ? La courbe (2) ?
   (b) Considérons l'ellipse (3), correspondant à un mouvement d'oscillateur harmonique. Déterminer les expressions de $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ dans ce cas. À partir de la lecture du graphe, déterminer la longueur L du pendule.
   (c) On suppose maintenant qu'on lance le pendule, depuis la position $\theta = 0$, avec une vitesse horizontale de norme $v = 9{,}0$ m/s. Déterminer son type de mouvement d'après le graphe.

Solide en rotation

Exercice 5 : Étude dynamique d'un moteur
On s'intéresse au fonctionnement d'une machine comportant une pièce tournante (par exemple, une perceuse). Le rotor, partie tournante du moteur, entraîne la parte tournante utile de la machine grâce à un arbre de transmission. L'axe de rotation est noté $\overrightarrow{u_x}$. La vitesse angulaire de rotation du rotor est notée ω, avec $\omega \geq 0$. La partie fixe du moteur (stator) entraîne le rotor en exerçant sur lui un couple dont la valeur en projection sur $\overrightarrow{u_x}$ est $\mathcal{M}_s > 0$.



1. En déduire le signe du couple $\mathcal{M}_u$ exercé par la partie utile tournante sur le rotor.
2. Souvent, l'ensemble est plongé dans un fluide visqueux dont l'action sur le rotor se ramène à un couple $\mathcal{M}_f = -\alpha\omega$. On suppose que les actions de contact des différentes pièces entre elles sont parfaites, de sorte que leur moment projeté sur Ox est nul (pivot parfait). On note J le moment d'inertie du rotor autour de l'axe de rotation. En déduire l'équation différentielle de $\omega(t)$.
3. En supposant que les couples $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_u$ sont a peu près constants dès la mise en rotation du rotor, trouver l'évolution de $\omega(t)$ sachant qu'on met le moteur en marche à $t = 0$ s.
4. (a) En déduire la vitesse angulaire de fonctionnement en régime permanent.
   (b) Cette vitesse dépend-elle des frottements du fluide ? Ces derniers ont-ils une autre influence ?
   (c) Discuter l'influence des couples $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_u$.
5. Faire un bilan d'énergie pour déterminer à quoi sert la puissance fournie par le stator en régime permanent.

Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Exercice 6 : Satellite

Dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen), un satellite artificiel de masse m se déaplce suivant une orbite circulaire de rayon $r = R + h$ autour du centre de la Terre (h étant son altitude par rapport à la surface terrestre). Ce mouvement peut s'étudier simplement à l'aide du PFD.

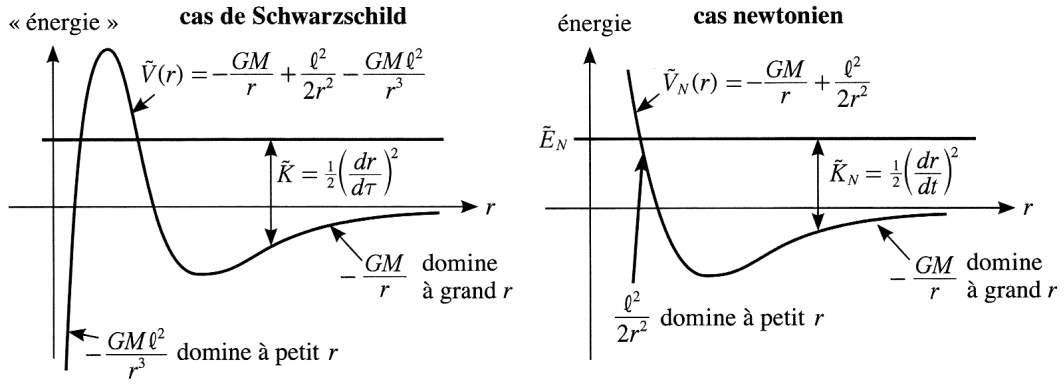
1. Montrer que la vitesse v est constante, et donner sa valeur en fonction de G, M, R et h.
2. En déduire la période T du mouvement, et montrer que $\frac{T^2}{R^3}$ a la même valeur pour tous les satellites. Quelle est la loi équivalente pour le système solaire ?
3. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie mécaniquez du satellite ; quelle est la relation simple existant entre les deux ? Commenter le signe de l'énergie mécanique.
4. Un satellite st dit géostationnaire s'il est immobile par rapport au référentiel terrestre. Quelle est alors sa période ? En déduire son altitude et commenter.

5. Pour que le satellite puisse tourner, il faut d'abord le lancer ! Le satellite étant initialement immobile par rapport à la Terre, sur une base de lancement située à la latitude λ, une fusée lui fournit un travail W pour l'amener sur son orbite avec la vitesse initiale calculée précédemment.
   (a) Quelle est l'énergie mécanique du satellite avant son lancement ? (On n'oubliera pas de tenir compte de la rotation de la Terre.)
   (b) Calculer le travail W que la fusée doit fournir au satellite. Où doit-on placer de préférence la base de lancement ?
   (c) Calculer, en pourcentage, l'économie réalisée entre un lancement depuis l'équateur ($\lambda_1 = 0°$) et un lancement depuis le nord de l'Europe ($\lambda_2 = 55°$), pour $h << R$. Commenter.

Données : $G = 6,67.10^{-11}$ SI ; $M_T = 6,0.10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km.

Exercice 7 : Trou noir (sans rotation) et espace-temps de Schwarzschild
On considère comme système d'étude une particule de masse m dans le champ de gravitation créé par un astre considéré comme fixe de masse M. On se place dans le référentiel « astrocentrique » et on choisit de décrire le mouvement du système en coordonnées polaires.

1. Montrer que le mouvement est plan, et que le produit $r^2\dot{\theta}$ est une constante, notée C.
2. Exprimer l'énergie mécanique de la particule et faire apparaître une énergie potentielle effective ayant l'expression suivante :
$$E_{\text{p,eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}mM}{r}$$
3. La figure ci-dessous est extraite du livre *Relativité générale* de Thomas Moore. Une comparaison y est faite entre l'énergie potentielle effective (par unité de masse) dans le cas newtonien et celle dans le cas dit « de Schwarzschild », utilisé notamment pour décrire le mouvement d'une particule à proximité d'un trou noir qui ne tourne pas sur lui-même.
   (a) L'expression trouvée à la question précédente correspond-elle bien au cas newtonien de la figure ?
   (b) Rappeler brièvement les différentes trajectoires possibles dans ce cas, en fonction de l'énergie mécanique de la particule.
   (c) Dans son livre, Thomas Moore explique qu'à proximité d'un trou noir on observe des comportements différents du cas newtonien :
   – il existe une orbite circulaire instable ;
   – il existe des orbites spirales se terminant en $r = 0$.
   Justifier ces comportements à l'aide de la figure, dans le cas de Schwarzschild.



Frottements solides

Problème : Les chaussettes de Tom Cruise dans Risky business
Trouver sur Internet et regarder la scène de danse de Tom cruise dans le film *Risky business* (1983). Grâce à cette seule vidéo, est-il possible d'estimer l'ordre de grandeur du coefficient de frottement dynamique entre le sol et les chaussettes de Tom Cruise ? Expliquer comment.