Exercice 1 : Produit vectoriel
Simplifier les expressions suivantes :

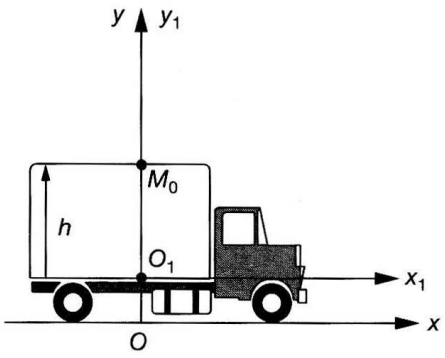
1. En coordonnées cartésiennes :
   (a) $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y}$ (b) $\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_y}$ (c) $\overrightarrow{u_x} \wedge (-\overrightarrow{u_x})$
2. En coordonnées cylindriques :
   (a) $3\overrightarrow{u_r} \wedge 5\overrightarrow{u_\theta}$ (b) $-4\overrightarrow{u_r} \wedge (3\overrightarrow{u_r} - 2\overrightarrow{u_z})$ (c) $\overrightarrow{u_z} \wedge (\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r})$

Exercice 2 : Homogénéité
Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles dont la norme est homogène à une position (longueur) ? Une vitesse ? Une accélération ? On note $\omega = \dot{\theta}$.
(a) $r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ (b) $\theta\overrightarrow{u_\theta}$ (c) $\ddot{y}\overrightarrow{u_y}$ (d) $r\overrightarrow{u_r}$ (e) $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ (f) $\overrightarrow{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$

Référentiel en translation par rapport à un autre

Exercice 3 : Vitesse de chute de la pluie
Le passager d'une voiture observe que la pluie tombe en formant un angle de 40° par rapport à la verticale lorsque celui-ci roule à 50 km/h. Lorsque la voiture s'arrête au feu, le passager constate que la pluie tombe verticalement. Calculer la vitesse de la pluie par rapport au sol puis par rapport à la voiture lorsqu'elle roule.

Exercice 4 : Chute d'une bille dans un véhicule
Un camion est animé d'un mouvement horizontal uniformément accéléré, d'accélération $\overrightarrow{a_e} = a_e\overrightarrow{u_x}$, avec $a_e = 2,45$ m.s^{-2}. On suppose que le véhicule démarre à $t = 0$ s avec une vitesse nulle. À cet instant, une bille préalablement solidaire du camion est lâchée du point M_0 sans vitesse initiale, d'une hauteur $h = 2,0$ m au-dessus du plancher.



Par rapport au sol, le mouvement de la bille se résume à une chute libre dans un référentiel non accéléré. On peut donc écrire, pour la bille à un instant t au cours de sa chute : $a_y(t) = -g$; $v_y(t) = -g.t$ et $y(t) = OM_0 - \frac{1}{2}gt^2$ avec $g = 9,8$ m.s^{-2}. Dans cet exercice on cherche à décrire le mouvement de la bille par rapport au camion (référentiel R_1).

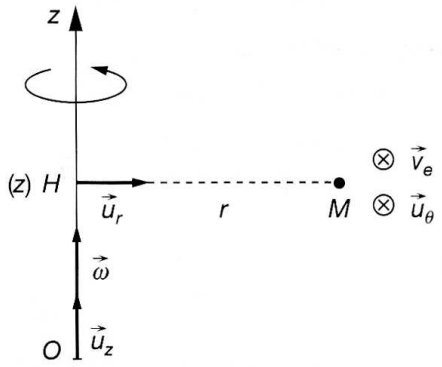
1. Exprimer les coordonnées $(a_{x_1}(t); a_{y_1}(t))$ du vecteur-accélération de la bille au cours de sa chute, dans le référentiel du camion R_1.
2. Exprimer les coordonnées $(v_{x_1}(t); v_{y_1}(t))$ du vecteur-vitesse de la bille au cours de sa chute, dans R_1.
3. En déduire les coordonnées du vecteur-position $(x_1(t); y_1(t))$ de la bille au cours de sa chute, dans R_1.

4. Quelle est l'équation de la trajectoire de la bille $y_1 = f(x_1)$ dans ce référentiel ? La dessiner sur un schéma.
5. Dans le référentiel R_1, calculer les coordonnées du point d'impact de la bille avec le plancher du camion, ainsi que la norme de la vitesse de la bille en ce point.

Référentiel en rotation uniforme par rapport à un autre

Exercice 5 : Expressions de $\overrightarrow{v_e}$ et $\overrightarrow{a_e}$ à l'aide du point coïncidant

On se place dans la situation d'un référentiel R_1 en rotation autour d'un axe fixe dans R en reprenant les mêmes notations que celles du cours. Le point coïcidant M_C, confondu géométriquement avec M, mais fixe par rapport à R_1, tourne localement autour de Oz entre les instants infiniment proches t et $t + \mathrm{d}t$. Précisément, il décrit une portion élémentaire de cercle, de centre H, de rayon $r = HM$ (voir figure) et de vitesse angulaire ω.



1. (a) Rappeler la définition de la vitesse d'entraînement $\overrightarrow{v_e}(M)$ du point M.
   (b) On se place en coordonnées cylindriques. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{OM_C}$ grâce à la relation de Chasles et montrer que $\overrightarrow{v_e}(M) = r\omega\overrightarrow{u_\theta}$.
   (c) Pour que la vitesse d'entraînement du point M soit plus grande (en norme), faut-il qu'il se rapproche ou s'éloigne de l'axe de rotation (Oz) ? Quelle est l'influence de la vitesse angulaire sur la vitesse d'entraînement ?
2. On fait l'hypothèse d'une rotation uniforme de R_1 par rapport à R ($\omega = \text{cte}$). Avec la méthode de la question 1, montrer dans ce cas que l'accélération d'entraînement s'écrit : $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2\overrightarrow{HM}$.

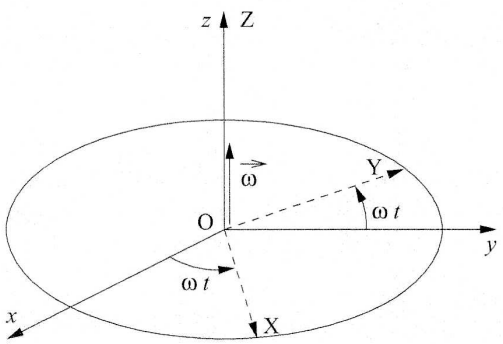
Exercice 6 : Accélération d'entraînement du référentiel terrestre

Dans le référentiel géocentrique R la Terre tourne sur elle-même autour de l'axe des pôle avec une périodicité d'environ 24 h. On donne le rayon moyen de la Terre : $R_T = 6,4.10^3$ km.

1. Calculer la vitesse angulaire (en rad/s) de rotation du référentiel terrestre R' par rapport au référentiel géocentrique R.
2. Calculer la valeur de l'accélération d'entraînement d'un point M à la surface de la Terre si celui-ci se situe :
   (a) Au pôle nord (b) Sur l'équateur (c) À une latitude $\lambda = 40^\circ$ (faire un schéma)
3. Comparer ces valeurs à l'accélération de la pesanteur.

Exercice 7 : Manège et accélération de Coriolis

Un manège est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{u_z}$. À la date $t = 0$ s, $\theta = \omega.t = 0$ et l'axe (O, X) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (O, x) du sol, l'axe (O, Y) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (O, y) du sol, et les axes verticaux (O, Z) et (O, z) sont confondus.



Le propriétaire du manège parcourt la plateforme pour ramasser les tickets. Il part du point O à $t = 0$ s et se déplace à une vitesse relative constante $\overrightarrow{v_r} = v_0\overrightarrow{u_X}$ dans le référentiel du manège.

1. Rappeler l'expression de l'accélération de Coriolis vue dans le cours, puis son expression dans le repère (O, X, Y, Z) associé au manège.
2. Faire l'application numérique sachant que le manège tourne à 4,5 tours/min et que le propriétaire avance à 5,0 km/h.
3. Quels paramètres ont-ils une influence sur l'accélération de Coriolis ? Expliciter dans quel sens ils la font varier.

Exercice 8 : (BONUS) Référentiel en rotation uniforme par rapport à un autre : composition des accélérations

Dans cet exercice on cherche à établir la loi de composition des accélérations dans le cas d'un référentiel R_1 en rotation uniforme par rapport à un référentiel R (autour d'un axe fixe). Pour cela on donne le point de départ : $\overrightarrow{a(M)}_R = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(M)_R}{\mathrm{d}t}\right)_R$ avec $\overrightarrow{v}(M)_R = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{v}(M)_{R_1}$; ainsi que la relation mathématique : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$.

1. Utiliser ce qui précède pour exprimer $\overrightarrow{a(M)}_R$.
2. Identifier l'accélération relative ; utiliser le point coïcindant pour identifier l'accélaration d'entraînement ; et identifier finalement l'accélération de Coriolis.