Exercice 1 : Questions de cours
Les questions suivantes sont indépendantes.

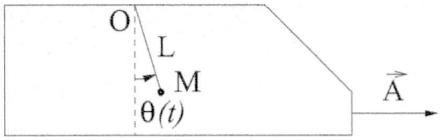
1. Citer le PFD, le TMC et le TEC en référentiel non galiléen.
2. Sous la forme d'un tableau, récapituler les expressions de l'accélération d'entraînement $\overrightarrow{a_e}$, de l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, de la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}}$, de la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{F_{ic}}$, dans le cas d'une translation ou dans le cas d'une rotation uniforme.
3. La force d'inertie de Coriolis fait apparaître un produit vectoriel. Faire une analyse dimensionnelle pour vérifier son homogénéité.
4. Dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme par rapport à un référentiel galiléen, la force d'inertie d'entraînement est-elle centripète ou centrifuge ?
5. Y a-t-il en toute rigueur une différence (sur Terre par exemple) entre champ de pesanteur et champ de gravitation ? Expliquer brièvement.

Référentiel en translation par rapport à un autre

Exercice 2 : Poids apparent dans un ascenseur et phénomène d'impesanteur
On considère une personne sur une balance (pèse-personne) posée dans un ascenseur. Pour simplifier les choses, on suppose que l'appareil affiche non pas la masse en kilogramme mais le poids en newton. L'ascenseur descend du 10ème étage d'un immeuble pour aller jusqu'au rez-de-chaussée. Pendant sa descente il passe notamment par une phase de mouvement à vitesse constante par rapport au sol. Pour traiter l'exercice, on choisira un repère vertical (Oz) orienté vers le bas.

1. On note $a(t)$ la coordonnée de l'accélération de l'ascenseur suivant (Oz) : $\overrightarrow{a} = a(t).\overrightarrow{u_z}$, avec a algébrique. Tracer qualitativement un graphique représentant l'allure de a en fonction du temps t au cours du mouvement de descente de l'ascenseur.
2. Proposer une définition du *poids apparent* $\overrightarrow{P_{\text{app}}}$ de la personne au cours du mouvement de descente en tenant compte d'une force d'inertie dont on précisera l'origine. On notera $\overrightarrow{P_0}$ le poids de la personne dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
3. Déduire des deux questions précédentes un graphique représentant l'allure de la norme du poids apparent de la personne au cours du temps (ce qu'afficherait la balance).
4. Que faudrait-il faire pour annuler le poids apparent dans l'ascenseur (situation d'*impesanteur*) ?
5. Citez au moins une autre situation d'impesanteur et expliquer brièvement le phénomène en précisant le référentiel, et en faisant une liste des forces appliquées à une personne.

Exercice 3 : Pendule simple dans un référentiel en translation
Un pendule simple est formé d'un fil inextensible de masse nulle et de longueur L, et d'un point matériel M de masse m. Son extrémité O est accrochés au plafond d'un train en accélération uniforme horizontale constante $\overrightarrow{A} = A\overrightarrow{u_x}$. L'angle d'inclinaison du fil est noté $\theta(t)$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la loi de la quantité de mouvement.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la loi du moment cinétique en O.
3. Déterminer l'angle d'équilibre θ_{eq}.
4. $(*)$ On étudie les petites oscillations autour de la position d'équilibre en posant $\theta(t) = \theta_{\text{eq}} + \epsilon(t)$ avec $\epsilon(t) \ll 1$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\epsilon(t)$ et en déduire la période T des petites oscillations.

On donne : $\sin(a \pm b) = \sin(a).\cos(b) \pm \cos(a).\sin(b)$ et $\cos(a \pm b) = \cos(a).\cos(b) \mp \sin(a).\sin(b)$.

Exercice 4 : Sismographe

Le sismographe vertical, représenté sur la figure 1, est constitué d'une masse m suspendue à un ressort dont l'autre extrémité Ω est liée à un bâti rigide solidaire du sol en vibration. Un dispositif d'acquisition permet d'enregistrer le mouvement de la masse m par rapport au bâti. On souhaite que ce mouvement reproduise le plus fidèlement possible celui du sol par rapport au référentiel d'étude $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On appelle $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ le référentiel lié au bâti rigide.

Le sol est supposé horizontal. Son mouvement vertical est décrit par une vibration de la forme : $Z_S(t) = Z_0 \cos(\omega t)$.

Le ressort, de masse négligeable, de constante de raideur k, de longueur au repos L_0, a pour longueur $L(t)$ à l'instant t. Un amortisseur, relié au ressort, exerce sur la masse m une action mécanique modélisée par la force : $\overrightarrow{f_r} = -\lambda \overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}_{\mathcal{S}}}(M)$ où $\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}_{\mathcal{S}}}(M)$ est la vitesse de la masse m dans le référentiel $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$.

On note L_1 la longueur du ressort quand la masse m est à l'équilibre en l'absence de secousse sismique. La masse m se situe alors à la cote z_1 repérée par rapport au bâti. On repère dans la suite la position de la masse m par $x(t) = z(t) - z_1$, où $z(t)$ est également repéré par rapport au bâti du sismographe.

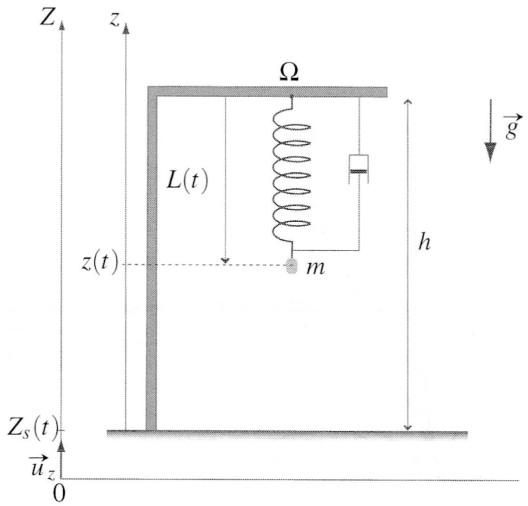


FIGURE 1 – Sismographe simple

1. (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ lors du séisme. L'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$$

Donner les expressions, les significations physiques et les dimensions de ω_0 et Q.

(b) On cherche la réponse du sismographe sous la forme : $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$. En posant $u = \omega/\omega_0$, montrer que :

$$\frac{X_0}{Z_0} = \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

2. Le graphe représentant les évolutions de X_0/Z_0 en fonction de u, pour différentes valeurs du paramètre Q, est donné sur la figure 2.
   (a) Vérifier que l'allure de ce graphe est compatible, à haute et à basse fréquence, avec l'expression calculée. Comment peut-on qualifier ce filtre ?
   (b) Comment faut-il choisir la pulsation propre ω_0 par rapport à la pulsation ω de la secousse sismique ? Justifier physiquement ce résultat.
   (c) Quel est le meilleur choix pour le paramètre Q, en terme de fidélité de la réponse et de durée du régime transitoire ?
   (d) Quel est l'ordre de grandeur de l'allongement du ressort à l'équilibre pour un sismographe optimisé pour détecter des ondes sismiques dont la période est de l'ordre de la seconde ? Commenter.

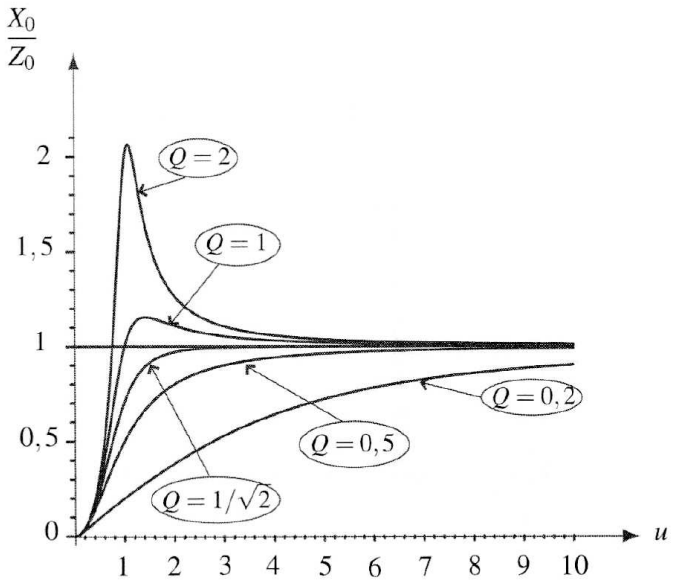


FIGURE 2 – Réponse fréquentielle du sismographe

RÉFÉRENTIEL EN ROTATION UNIFORME PAR RAPPORT À UN AUTRE ; RÉFÉRENTIEL TERRESTRE

Exercice 5 : Manège

Cet exercice est une version guidée du problème n°2. Si vous vous sentez à l'aise sur ce chapitre, ne lisez pas ce qui suit et faites directement le problème. Sinon, répondez aux questions suivantes en vous basant sur la photographie du problème n°2. Le but de l'exercice est de déterminer un ordre de grandeur de la vitesse angulaire de rotation du manège (en tours/min).

1. Choisir le référentiel galiléen et non galiléen pour cette étude.
2. Caractériser le mouvement d'une personne assise, dans le référentiel non galiléen.

3. Dessiner un schéma simplifié du manège en coupe (passant par l'axe de rotation) et introduire des notations pour les grandeurs pertinentes. Procéder grâce à l'image à une estimation (en ordre de grandeur) des longueurs inconnues en utilisant une personne pour l'échelle.
4. Choisir un système de coordonnées adapté, dans le référentiel non galiléen.
5. Un angle intervient peut-être dans la résolution de cet exercice. Lequel à votre avis ? L'estimer à l'aide de la photographie.
6. Faire le bilan des forces exercées sur le système {personne + nacelle} dans le référentiel non galiléen en tenant compte des forces d'inertie. Les ajouter sur le schéma.
7. Écrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen et en déduire une estimation de la vitesse angulaire du manège en tours/min. Porter un regard critique sur le résultat.

Exercice 6 : Force de Coriolis sur un train et usure des rails

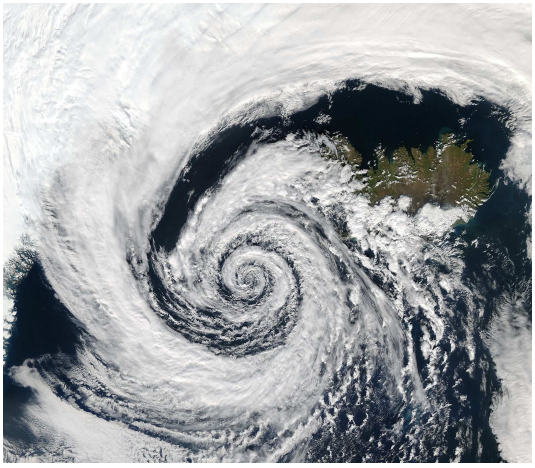
Un train à grande vitesse, de masse $m = 7,8.10^5$ kg, circule du nord vers le sud entre Lyon et Avignon à la vitesse constante $v = 300$ km/h ; à l'instant considéré il se trouve à la hauteur de Valence à la latitude $\lambda = 45^\circ$ nord. Au point P où se situe le train, on définit une base orthogonale $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ avec $\overrightarrow{e_x}$ vers l'est, $\overrightarrow{e_y}$ vers le nord et $\overrightarrow{e_z}$ vers le zénith. On fait l'approximation dans cet exercice que le champ de pesanteur à la surface de la Terre s'identifie au champ de gravitation.

1. Faire un schéma où apparaissent la Terre (en coupe), la base ci-dessus au point P, le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre $\overrightarrow{\omega}$.
2. Déterminer la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre, et comparer sa norme à celle du poids du train. On donne $\Omega = 7,3.10^{-5}$ rad/s ; $g = 9,8$ m.s^{-2}.
3. Faire un schéma local du train, vu de l'arrière, et représenter les différentes forces subies. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui change quand le train va vers le nord ?

Exercice 7 : Autres effets de la force de Coriolis en référentiel terrestre

Cet exercice est un prolongement des exemples vus en cours. On y met en évidence, par des considérations qualitatives, les effets de la force de Coriolis dans le référentiel terrestre en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique.

1. **Mouvement horizontal et déviation vers la droite.**
   (a) On considère un système se déplaçant dans l'hémisphère nord. Montrer, en examinant quatre sens possibles de mouvements horizontaux (vers le nord, l'ouest...) que dans chaque cas la force de Coriolis à tendance à engendrer une déviation vers la droite. Faire un schéma !
   (b) En est-il de même dans l'hémisphère sud ?
   (c) En météorologie, on appelle *dépression* une zone de basse pression atmosphérique par rapport au voisinage de cette zone. Le gradient de pression associé a pour conséquence de mettre en mouvement les masses d'air vers le centre de la dépression. Montrer, grâce aux questions précédentes, et en faisant un schéma, que les masses d'air s'enroulent autour d'une dépression dans le sens observé sur l'image suivante (dépression située en Islande, hémisphère nord).

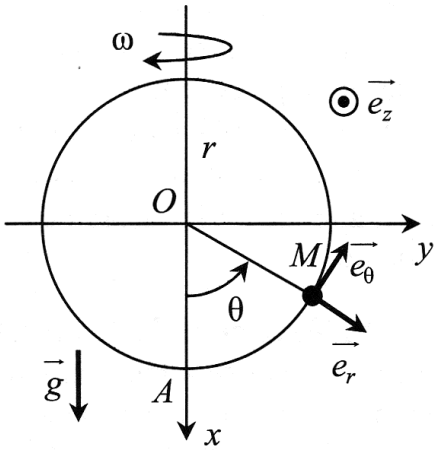


(d) Chercher sur internet ce qu'est le *pendule de Foucault*. Expliquer qualitativement son mouvement dans le référentiel terrestre (dans l'hémisphère nord) en faisant appel à l'effet de la force de Coriolis abordé dans cette question 1.

2. **Chute verticale et déviation vers l'est.**
   En 1833 Ferdinand Reich réalise une expérience au cours de laquelle il fait tomber des projectiles dans un puits de 158 m de profondeur à Freiberg (Allemagne). Il observe alors une déviation de 28 mm vers l'est. Justifier le sens de cette déviation grâce à la force de Coriolis.

Exercice 8 : (∗) Anneau sur un cercle en rotation

Un guide circulaire de centre O et de rayon r est en rotation uniforme, caractérisée par $\overrightarrow{\Omega} = \omega\overrightarrow{e_z}$, autour de son diamètre vertical (Ox), par rapport au référentiel terrestre galiléen (R). Le référentiel d'étude est le référentiel (C) lié au cercle auquel on attache le repère $(Oxyz)$.
Un anneau de masse m, assimilé à un point matériel M, est astreint à coulisser sans frottement sur la circonférence. Son mouvement dans (C) est repéré par l'angle θ entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$. On note $\overrightarrow{g} = +g\overrightarrow{e_z}$ le champ de pesanteur, et $\overrightarrow{R}$ la réaction du cercle sur M.



1. Faire la liste complète des forces qui s'exercent sur M dans le référentiel (C), et donner les composantes de ces forces dans la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour M dans ce référentiel, et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$, ainsi que l'expression de $\overrightarrow{R}$ en fonction de θ, de ses dérivées et des paramètres du problème.

3. Indiquer la ou les position(s) d'équilibre de M dans ce référentiel.
4. À l'aide de l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ montrer que la position $\theta = 0$ correspond à une position d'équilibre stable ou instable, selon une condition que l'on précisera.

Exercice 9 : La force d'inertie d'entraînement est-elle conservative ?
En général non, mais elle l'est par exemple dans le cas particulier d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe.

1. En utilisant les notations du cours, exprimer le travail élémentaire de la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}}$ dans ce cas.
2. Montrer alors que dans cette situation on peut associer à la force d'inertie d'entraînement l'énergie potentielle $E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 HM^2 + \text{cte}$.

Exercice 10 : (∗) Télescope à miroir liquide
Un récipient cylindrique de rayon de base r_0 est rempli d'un liquide sur une hauteur h_0 lorsqu'il est au repos. On le fait tourner autour de son axe Oz à la vitesse angulaire ω constante (et on suppose le fluide entraîné à la même vitesse en équilibre relatif).
Donnée : expression du gradient en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$.

1. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide. En déduire, par intégration, le champ de pression $P(r, z)$ dans le liquide (sans chercher à déterminer la constante d'intégration K).
2. Comment est définie la surface libre $z_s(r)$ du liquide ? Donner son équation sous la forme $z_s(r) - z_0$ en fonction de r et de ω, g et r_0. Commenter.
3. Application numérique : donner Δz entre le centre et le bord du liquide pour $\omega = 2$ tr/s et $r_0 = 5$ cm.
4. Parmi les applications de ce phénomène on peut citer les *télescopes à miroir liquide*. Faites une recherche sur internet pour vous renseigner sur les aspects technologiques de ce type de dispositif.

Problème n°1 : Créer une gravité artificielle dans un vaisseau spatial
L'état d'impesanteur a de nombreuses conséquences sur le corps d'un(e) cosmonaute dans l'espace. Il serait probablement bénéfique, pour un long voyage, de recréer une gravité « artificielle » dans le vaisseau spatial utilisé.
Proposer deux solutions technologiques (applications numériques à l'appui) permettant de réaliser une telle gravité artificielle dans un vaisseau. Discuter la faisabilité et les avantages / inconvénients de chaque solution.

Problème n°2 : Manège

Déterminer un ordre de grandeur de la vitesse de rotation (en tours/min) du manège de la photographie ci-dessous.