Exercice 4

1. a. À l'équilibre, le solide (Σ) est soumis à son poids et à la tension du ressort :

$$\vec{0} = -mg\,\vec{u}_z + k(L_1 - L_0)\,\vec{u}_z,$$

avec $L_1 = h - z_1$. On en déduit : $z_1 = h - L_0 - \dfrac{mg}{k}$.

Étude dans le référentiel non galiléen lié au boîtier :

Le référentiel lié au boîtier (noté $\mathscr{R}_S$) est en translation rectiligne non uniforme par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$.

La force d'inertie d'entraînement ressentie par le solide (Σ) s'écrit :

$$\vec{f}_{ie} = -m\,\vec{a}_e = -m\frac{\mathrm{d}^2 Z_S}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_z.$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au solide (Σ) dans le référentiel lié au boîtier s'écrit : $m\,\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}_S} = m\,\vec{g} + k(L(t) - L_0)\,\vec{u}_z - \lambda\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z - m\dfrac{\mathrm{d}^2 Z_S}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_z$. En projection sur $\vec{u}_z$, on obtient :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -mg + k(h - z - L_0) - \lambda\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + m\omega^2 Z_0\cos(\omega t).$$

En soustrayant la relation à l'équilibre établie au début, on en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = \omega^2 Z_0\cos(\omega t).$$

C'est bien de la forme voulue avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{km}}{\lambda}$.

ω_0 est homogène à une pulsation : $[\omega_0] = \left(\dfrac{MLT^{-2} \times L^{-1}}{M}\right)^{1/2} = T^{-1}$.

Q est sans dimension : $[\lambda] = \dfrac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$ a la même dimension que le produit $m\omega_0$.
ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur, Q son facteur de qualité.
b. On passe en notation complexe : $\underline{x}(t) = X_0 \exp\big(i(\omega t + \varphi)\big) = \underline{X} \exp(i\omega t)$. En injectant dans l'équation du mouvement, on obtient : $\left(-\omega^2 + i\omega\dfrac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\underline{X} = \omega^2 Z_0$, donc : $\dfrac{\underline{X}}{Z_0} = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\dfrac{\omega\omega_0}{Q}} = \dfrac{u^2}{1 - u^2 + i\dfrac{u}{Q}}$ avec $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.
On prend le module de cette relation :

$$\frac{X_0}{Z_0} = \left|\frac{\underline{X}}{Z_0}\right| = \frac{u^2}{\sqrt{\left(1 - u^2\right)^2 + \dfrac{u^2}{Q^2}}}.$$

2. a. Quand u tend vers 0, X_0/Z_0 tend vers 0, ce que l'on retrouve sur le graphe. Quand u tend vers l'infini, X_0/Z_0 tend vers 1, ce que le graphe confirme également.
Ce filtre laisse passer les hautes fréquences et coupe les basses fréquences : c'est un filtre passe-haut.

Remarque

Pour un facteur de qualité élevé, on peut aussi considérer ce filtre comme un filtre passe-bande, même si cela ne correspond pas à son utilisation courante.

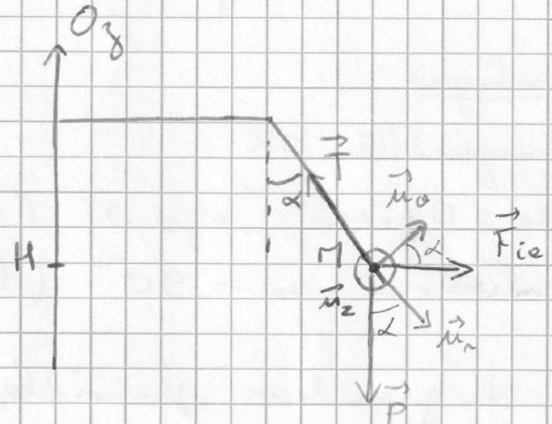
b. On souhaite que les mouvements du solide restituent ceux du sol donc que : $X_0 = Z_0$. Il faut pour cela que $\omega \gg \omega_0$. Dans ces conditions, le solide (Σ) reste pratiquement immobile dans le référentiel galiléen, le ressort est si souple que le solide (Σ) ignore les mouvements du sol.
c. Si on choisit un facteur de qualité proche de la valeur critique Q_0, la réponse du sismographe reproduit le mouvement du sol dès que ω est environ égale à $3\omega_0$ alors que pour un facteur de qualité plus faible, il faut une fréquence beaucoup plus grande pour que la courbe soit confondue avec son asymptote. La valeur Q_0 semble donc être le meilleur choix. Il correspond de plus à un temps d'amortissement du régime transitoire le plus court : les deux critères sont donc compatibles.
d. À l'équilibre, l'allongement du ressort est : $\Delta L = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{g}{\omega_0^2}$. Sachant que $\omega^2 \gg \omega_0^2$, on en déduit : $\Delta L \gg \dfrac{g}{4\pi^2 f^2}$ où f est la fréquence enregistrée. En prenant $f = 1$ Hz, on trouve $\Delta L \gg 25$ cm. Si on veut par exemple un facteur 3 entre ω et ω_0, on obtient $\Delta L \simeq 2,3$ m : le sismographe est très encombrant !
Les sismographes construits selon ce modèle avaient des dimensions impressionnantes (masse de plusieurs centaines de kilogrammes, taille de plusieurs mètres).

Exercice 5

1) Référentiel lié au manège (RNG) : $\underline{R_1}$

2) Personne immobile ds R_1

3)



Avec $HM \simeq 7$ m

(échelle obtenue grâce à la personne debout à gauche de l'axe de rotation du manège)

4) $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

5) $\alpha \simeq 40°$

6) $\underline{\text{BFE}}$ sur le syst {personne + nacelle}

* poids $\vec{P} = mg\cos(\alpha)\vec{u}_r - mg\sin(\alpha)\vec{u}_\theta$
* tension des câbles $\vec{T} = -T\vec{u}_r$
* force d'inertie d'entraînement :

$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$

$= m\omega^2 HM\,(\sin(\alpha)\vec{u}_r + \cos(\alpha)\vec{u}_\theta)$

7) $m\vec{a} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F_{ie}}$.

En projection sur $\vec{u_\theta}$:

$$-mg\sin(\alpha) + m\omega^2 HM\cos(\alpha) = 0$$

soit $g\sin(\alpha) = \omega^2 HM\cos(\alpha)$

d'où $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{HM}\tan(\alpha)}}$ (1)

$\omega \simeq 1$ rad/s soit $\boxed{\omega \simeq 1.10^1 \text{ tours/min}}$ (2)

Regard critique :

(1) → homogénéité OK.

→ si $\omega = 0$ rad/s, $\alpha = 0°$ (logique)

→ si $\omega \to +\infty$, $\alpha \to 90°$ (logique)

(2) ordre de grandeur plausible...