Exercice 8

1. On étudie le point matériel M de masse m dans le référentiel (C) de l'anneau, non galiléen (en rotation uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen R). Son mouvement est circulaire : $\vec{v}(M)_C = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\vec{a}(M)_C = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.

Dressons le bilan des forces appliquées à M :

– le poids $\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = +mg\,\overrightarrow{e_x} = mg\left(\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)}$;

– la réaction normale du support circulaire $\boxed{\vec{R} = R_r\,\overrightarrow{e_r} + R_z\,\overrightarrow{e_z}}$;

– la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e}(M) = +m\omega^2\,\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté de M sur l'axe de rotation (Ox), soit $\boxed{\overrightarrow{f_{ie}} = m\omega^2\,r\sin\theta\,\overrightarrow{e_y} = m\omega^2\,r\sin\theta\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)}$;

– la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c}(M) = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_C = -2m\omega\,\overrightarrow{e_x}\wedge r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$ soit $\boxed{\overrightarrow{f_{ic}} = -2m\omega r\dot{\theta}\cos\theta\,\overrightarrow{e_z}}$.

Ne pas oublier la composante sur $\overrightarrow{e_z}$ dans la réaction normale ! Ce n'est pas parce qu'elle n'est pas dans le plan de figure qu'elle n'existe pas… et la suite montrera qu'elle est bien non nulle en général.

2. Appliquons le PFD à M dans le référentiel (C) : $m\vec{a}(M)_C = \vec{P} + \vec{R} + \overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{f_{ic}}$. En projection dans la base $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}\right)$ il vient :

$$\begin{cases} mg\cos\theta + R_r + m\omega^2 r\sin^2\theta = -mr\dot{\theta}^2 \\ -mg\sin\theta + m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta = mr\ddot{\theta} \\ R_z - 2m\omega r\dot{\theta}\cos\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} r\ddot{\theta} + g\sin\theta - \omega^2 r\sin\theta\cos\theta = 0 \\ R_r = -mg\cos\theta - m\omega^2 r\sin^2\theta - mr\dot{\theta}^2 \\ R_z = 2m\omega r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}}.$$

3. Une position d'équilibre est donnée par $\ddot{\theta} = 0$ d'où $\sin\theta(g - \omega^2 r\cos\theta) = 0$, soit :

– $\sin\theta = 0$, ce qui correspond à $\boxed{\theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi}$;

– ou bien $\cos\theta = \dfrac{g}{r\omega^2}$, soit $\boxed{\theta = \arccos\dfrac{g}{r\omega^2}}$ qui n'existe que $\boxed{\text{si } \omega > \sqrt{\dfrac{g}{r}}}$.

On pourrait montrer que c'est la dernière position qui est stable lorsqu'elle existe, sinon c'est $\theta = 0$.

4. Considérer θ << 1 et simplifier l'équation différentielle. Solutions en cos ou exp selon la valeur de ω.

Exercice 9

1) En coordonnées cylindriques :

$$\delta W(\vec{F}_{ie}) = \vec{F}_{ie} \cdot \vec{dl}$$

$$= m\omega^2 \vec{HM} \cdot (dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z)$$

$$= m\omega^2 \cdot r\,\vec{u}_r \cdot (\quad " \quad " \quad " \quad)$$

$$\boxed{\delta W(\vec{F}_{ie}) = m\omega^2 r\,dr}$$

2) $\delta W(\vec{F}_{ie}) = -d\left(-\frac{1}{2} m\omega\, r^2\right) + cte)$

Donc dans $\vec{F}_{ie}$ est conservative, et l'énergie potentielle associée est :

$$\boxed{E_p = -\frac{1}{2} m\omega^2 HM^2 + cte}$$

Exercice 10

La méthode employée dans ce corrigé pour la question a) est différente de celle du cours. Mais celle du cours, où l'on intègre les équations faisant intervenir des dérivées partielles, marche très bien ici aussi !

On adopte les coordonnées cylindriques d'axe de rotation Oz vertical ascendant en notant $\vec{r} = r\,\vec{u}_r$.

a) Dans le référentiel tournant (R), non galiléen, on traduit l'équilibre d'une particule fluide de masse $dm = \rho dV$; outre les forces de pesanteur $dm\vec{g}$ et les forces de pression $-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\,dV$, il faut tenir compte de la force d'inertie d'entraînement limitée à $-dm(-\omega^2\vec{r})$ (la force de Coriolis est nulle à l'équilibre relatif) :

$$dm\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\,dV + dm\omega^2\vec{r} = \vec{0}\text{, et par unité de volume :}$$

$$\boxed{\rho\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) + \rho\omega^2\vec{r} = \vec{0}}$$

Le poids et la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle et l'équation précédente s'écrit avec $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(-\rho g z - P(r,z) + \rho\omega^2\frac{r^2}{2}\right) = \vec{0}$$

indiquant que la fonction entre parenthèse est uniforme dans tout l'espace (c'est-à-dire indépendante de r et z) d'où la pression :

$$\boxed{P(r,z) = \rho\omega^2\frac{r^2}{2} - \rho g z + K} \quad (1)$$

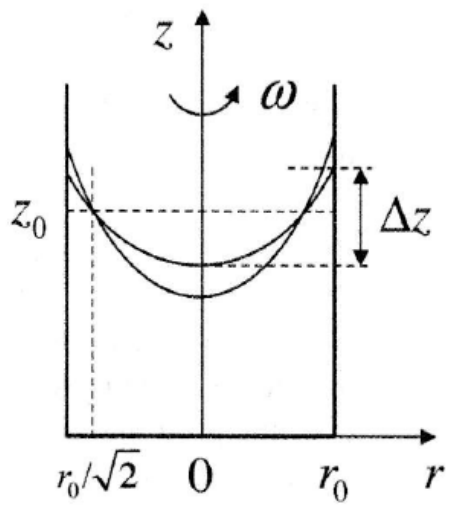
La constante K représente la valeur de la pression pour les valeurs particulières des variables r et z ; elle dépend du paramètre ω, vitesse angulaire de rotation, il est donc impensable de la déterminer sur une valeur particulière de ω !

b) La surface libre $z_s(r)$ du liquide est définie par $P(r, z_s) = P_0$ soit en posant $\lambda = \dfrac{K - P_0}{\rho g}$:

$$z_s(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + \lambda$$

(on constate que λ représente la hauteur d'eau au centre et dépend elle aussi de ω)

La surface libre possède donc la forme d'un paraboloïde de révolution d'axe Oz.



Pour déterminer la constante λ, écrivons la conservation du volume (le liquide est incompressible) entre la situation $\omega \neq 0$ et la situation $\omega = 0$ en considérant dans l'intégrale pour volume élémentaire, la couronne cylindrique entre les rayons r et $r + dr$ et de hauteur $z_s(r)$:

$$\int_0^{r_0} 2\pi r dr\, z_s(r) = 2\pi \int_0^{r_0} r dr \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + \lambda \right) = \pi r_0^2 z_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = z_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{4g}$$

d'où l'équation de la surface libre : $\boxed{z_s(r) - z_0 = \frac{\omega^2}{2g}\left(r^2 - \frac{r_0^2}{2} \right)}$

On constate qu'elle est indépendante de la pression P_0, que l'on retrouve bien $z_s(r) = z_0 \ \forall r$ pour $\omega = 0$. À noter que $\forall \omega \neq 0$, on a $z_s = z_0$ pour $r = r_0/\sqrt{2}$ indépendant de ω : on observe donc, lorsque ω varie, une famille de paraboloïdes passant tous par un cercle fixe de rayon $r_0/\sqrt{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{au centre : } z_m = z_s(r=0) = z_0 - \dfrac{\omega^2 r_0^2}{4g} \\ \text{au bord : } z_M = z_s(r=r_0) = z_0 + \dfrac{\omega^2 r_0^2}{4g} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \underline{\Delta z} = z_M - z_m = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} = \underline{2{,}0 \text{ cm}}$$

<u>Problème n°1</u>

Corrigé en classe

<u>Problème n°2</u>

Voir la correction de l'exercice 5