classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Feuille d'Exercices $n°11$**
Février 2026 **Probabilités 2iéme Partie**

Exercice 1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel non nul . On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n et d'une pièce de monnaie dont le coté pile apparaît avec une probabilité égale à p. On tire un jeton au hasard puis on lance la pièce autant de fois que le numéro porté par le jeton. On note Y le nombre de côtés pile obtenus.

1. Donner la loi de Y (on laissera le résultat sous forme de somme).
2. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 3. Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément cinq boules dans l'urne.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 5. Soit $p \in \,]0,1]$. Soit $\lambda \in \,]0,+\infty[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 6. Dans un parc, il y a chaque jour N visiteurs. On admet que N suit une loi de Poisson . Pour rentrer, il y a quatre guichets. Chaque jour, il y a une moyenne de 4000 visiteurs. Soit X le nombre de personnes se présentant au guichet 1.

1. Détailler la loi de N.
2. Quelles valeurs peut prendre X ?
3. Donner la loi de X sachant $N = k \in \mathbb{N}$.
4. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, (X = n) = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} ((X = n) \cap (N = k))$.
5. Déterminer la loi de X.

Exercice 7. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in \,]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 9. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in \,]-1, 1[$.
Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Exercice 10.
1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n \in L^2$.
   On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in \,]0, +\infty[,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application**
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Exercice 11. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in \,]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.

2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (X_i)$
   c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant ń le plus petit élément de ż.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Exercice 12. : Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ des variables aléatoires discrètes réelles. On appelle matrice de covariance de la famille $(X_1, \cdots, X_n)$ la matrice $M = (Cov(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Si $X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$ (avec $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$) exprimer $V(X)$ en fonction de la matrice M.
2. En déduire que les valeurs propres de M sont toutes positives.

Exercice 13. : (Centrale 2018)
Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1. Donner la loi de S_n et préciser son espérance et sa variance.
2. Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable $exp(\lambda(X_1 - \frac{1}{2}))$.
3. Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de la variable $exp(\lambda(S_n - E(S_n)))$.
4. Soit $t, \lambda > 0$. Trouver une fonction f_t telle que $P(\lambda(_n - E(S_n)) > nt) \leq e^{n f_t(\lambda)}$.
5. Soit $\lambda > 0$. Déterminer le maximum de $f_t(\lambda)$ pour $|t| \leq \frac{1}{2}$.