PSI
MATHEMATIQUES
Janvier 2026

Feuille d'Exercices $n°9$
Probabilités-Variables Aléatoires- Loi d'une v.a

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Écrire avec les opérations ensemblistes ($\cap, \cup$ et complémentaire) les événements suivants :

1. L'un au moins des événements A, B ou C est réalisé.
2. L'un et seulement l'un des événements A, B est réalisé.
3. Les deux événements A et B sont réalisés mais C ne l'est pas.
4. Tous les événements $A_n, n \geq 1$ sont réalisés.
5. Une infinité d'événements parmi les $A_n, n \geq 1$ sont réalisés.
6. Seul un nombre fini des événements $A_n, n \geq 1$ est réalisé.
7. Une infinité d'événements parmi les $A_n, n \geq 1$ ne sont pas réalisés.
8. Tous les événements $A_n, n \geq 1$ sont réalisés à partir d'un certain rang.

Exercice 2. Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé. On sait que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{4}{9}$. Calculer $\mathbb{P}_B(A), \mathbb{P}_B(\overline{A}), \mathbb{P}_B(A \cap \overline{B})$

Exercice 3. Émile est un excellent footballeur . La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est 2/3. Paulin est moins fort .La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est 1/2. Émile lance un défi à Paulin : chacun va tirer un pénalty à son tour en commençant par Paulin. Le premier qui marque à gagné. Quelle est la probabilité qu'Émile gagne ?

Exercice 4. On lance $2n + 1$ fois une pièce équilibrée.

1. Pour $k \in [\![0; 2n + 1]\!]$, rappeler la probabilité p_k d'obtenir k fois « pile ».
2. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} p_k$?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de « pile »que de « face »lors de ces lancers ?

Exercice 5. On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir deux fois 6 (pas nécessairement consécutivement). On appelle X le nombre de lancers nécessaires. Quelle est la loi de X ?

Exercice 6. (CCINP PSI 2021)
Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1. Soit N le nombre de lancers obtenus. Déterminer la loi de N .
2. Pour tous $(k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = k, N = n)$.
3. Calculer $P(X = k)$. En déduire la loi de X .
4. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. On dispose de $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard et sans connaître son numéro, on en tire un nombre n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche sachant que, au cours des n premiers tirages, seules les boules blanches ont été tirées ?
2. Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 8. On dispose d'une urne contenant 1 boule blanche et une boule noire . On effectue $n \in [\![1, +\infty[\![$ tirages successifs dans cette urne en suivant le protocole suivant : les tirages sont successifs et avec remise de la boule tirée ainsi qu'une autre boule de l'autre couleur.
Notons pour $k \in [\![1, n]\!]$
N_k : la boule tirée au k ième tirage est noire.
A_k : la première boule noire est obtenue au k ième tirage.
A_0 : aucune boule noire n'est tirée lors des n tirages.

1. Calculer $P(N_1)$.
2. Les évènements de la famille $(N_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. Calculer $P(N_2)$ et $P_{N_2}(N_1)$.
4. Calculer $P(A_k)$ et $P(A_0)$.
5. En déduire, que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice 9. : L'information »Elvis Presley est encore en vie « est transmise de proche en proche parmi n personnes de la personne 1 à la personne n. Chaque personne i de cette chaîne humaine transmet l'info reçue avec une proba p et l'info contraire avec la proba 1-p. On souhaite déterminer la proba p_n que la personne n reçoive l'info »Elvis Preslez est encore en vie «

1. Déterminer p_1, p_2, p_3(faire un arbre)
2. Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n
3. En déduire $\underset{n\to+\infty}{lim}\ p_n$.

Exercice 10. Un(e) élève de PSI, conscient(e) de l'enjeu de travailler régulièrement toutes les matières décide d'une stratégie pour répartir le gros de ses heures de travail personnel, entre les matières scientifiques P, S et M.

A l'instant $t = 0$ correspondant au jour de la rentrée de septembre, le dernier cours qu'il a travaillé une heure durant est le cours P. Quand il a travaillé une heure une matière, il consacre l'heure suivante avec équiprobabilité à l'une des deux autres matières.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note P_n l'événement « l'élève étudie la matière P au cours de sa n-ième heure de travail personnel » .
On note S_n l'événement « l'élève étudie la matière S au cours de sa n-ième heure de travail personnel » .
On note M_n l'événement « l'élève étudie la matière M au cours de sa n-ième heure de travail personnel » .
On pose $P(P_n) = p_n$, $P(S_n) = s_n$ et $P(M_n) = m_n$.

1. (a) En justifiant avec précision, montrer que
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}s_n + \frac{1}{2}m_n$$
   (b) Exprimer, de même, s_{n+1} et m_{n+1} en fonction de p_n , s_n et m_n .
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres de A.
   (c) A est-elle diagonalisable ?
   (d) Sans calcul supplémentaire, justifier qu'il existe une matrice Q inversible dont on précisera les colonnes, et qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ dont on précisera les coefficients diagonaux telles que :
$$D = Q^{-1}AQ$$
   Remarque : Le calcul de Q^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer p_n, s_n et m_n en fonction de n et du vecteur $X_0 = (1, 0, 0)$.
4. Que vaut $p_n + s_n + m_n$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$?
5. Exprimer A^n à l'aide de Q, Q^{-1} et D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En déduire l'expression de p_n, s_n, m_n en fonction de n.
7. Application numérique : le minimum raisonnable étant de $20h/semaine$, au bout de 30 semaines de préparation aux écrits, que vaudront p_n, s_n, m_n ?
8. Que dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$?
   Quelle hypothèse du départ, faut-il modifier pour avoir un résultat différent ?

Exercice 11. Soient X, Y 2 v.a indépendantes suivent une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

1. En développant de 2 façons différentes $(1 + X)^{2n}$, montrer que $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$.
2. Calculer la probabilité que $X = Y$.
3. Calculer la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice 12. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = X^2 + 1$.

1. Calculer $P(2X < Y)$
2. Calculer la probabilité que X soit pair ; y-a-t-il plus de chances que X soit impair ?

Exercice 13. Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p(p \in]0, 1[)$.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k|X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Exercice 14. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Expliciter les lois marginales de U et de V.
3. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 15. Soit X et Y deux v.a indépendantes de loi géométrique p. Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Soient I, S avec $I \leq S$ les deux valeurs propres de M.

1. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les expressions de I et S en fonction de X et Y.
3. Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?