

Les télescopes infrarouges

Épreuve de Physique — filière MP

Concours commun Centrale–Supélec, session 2014

I. Détection de rayonnement infrarouge

I.A. Généralités sur les détecteurs

I.A.1) Dans le domaine optique (et des proches infrarouge et ultraviolet, on peut citer les *photodiodes* et phototransistors (générateurs de courant proportionnel à l'éclairement reçu) ou les *capteurs CCD*, chaque pixel du capteur formant un condensateur dont la charge est proportionnelle à l'énergie lumineuse reçue.

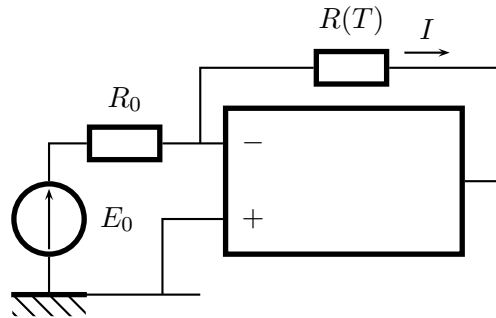
I.A.2) L'infrarouge occupe le domaine spectral $750 \text{ nm} < \lambda < 1 \text{ cm}$; en deçà on retrouve le domaine visible et au-delà les ondes centimétriques (ou radio hyperfréquences).

I.A.3) λ_{max} est la longueur d'onde du maximum d'émission d'un corps noir (ou absorbeur intégral) en équilibre thermique à la température T avec le rayonnement qu'il émet et reçoit.

I.A.4) Pour un objet terrestre à $T = 300 \text{ K}$, on obtient $\lambda_{\text{max}} = 9,6 \mu\text{m}$ (en plein dans le domaine infrarouge); pour un objet refroidi à $T = 40 \text{ K}$, on trouve encore $\lambda_{\text{max}} = 0,72 \mu\text{m}$, toujours dans le domaine infrarouge. Il faut donc refroidir suffisamment l'environnement du télescope pour éviter tout rayonnement infrarouge parasite. Par exemple pour atteindre $\lambda_{\text{max}} > 1 \text{ cm}$ il faudra atteindre $T < 0,3 \text{ K}$, ce qui est justement le but de la dernière partie du problème.

I.B. Principe du bolomètre

I.B.1) On peut proposer un convertisseur courant-tension réalisé à partir d'une source de tension, générateur de Thévenin de tension à vide (constante) E_0 et de résistance interne (également constante) R_0 , selon le schéma ci-après.



Si l'amplificateur opérationnel est idéal, le courant I dans le bolomètre $R(T)$ est égal au courant I dans R_0 . Si

l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, $v_- = v_+ = 0$ donc ce courant vaut $I = \frac{E_0}{R_0} = \text{cte}$.

I.B.2) Le premier principe de la Thermodynamique appliqué au bolomètre s'écrit $dU = \delta W + \delta Q$ avec ici $dU = C_{\text{th}}dT$, $\delta = R(T)I^2dt$ et $\delta Q = -G_{\text{th}}[T(t) - T_S]dt$, par définition même de la conductance

thermique. On en déduit immédiatement $\tau \frac{dT}{dt} + T(t) = \beta(\Phi_i)$ à condition de poser $\tau = \frac{C_{\text{th}}}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2}$

et $\beta(\Phi_i) = \frac{\Phi_i + R_0 I^2}{G_{\text{th}} - \alpha R_0 I^2} + T_S$.

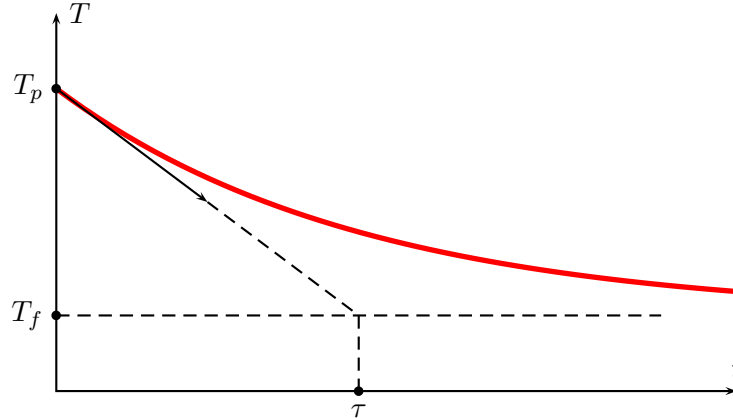
I.B.3) Avec $\alpha > 0$ donc nécessairement $\tau > 0$, le régime libre est stable (décroissant vers 0). Si $\alpha > 0$ on aurait pu obtenir $\tau < 0$ pour des valeurs élevées de $R_0 I^2$: un échauffement de l'appareil entraîne alors une

augmentation de la résistance électrique, donc un nouvel échauffement qui ne peut pas être compensé par la conductance thermique de refroidissement, et le régime est instable.

I.B.4) En régime permanent, $\frac{dT}{dt} = 0$ donc $T_p(\Phi_i) = T_S + \frac{\Phi_i + R_0 I^2}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$.

I.C. Temps de réponse du bolomètre

I.C.1) Si $\Phi_i = 0$ on peut écrire $\tau \frac{dT}{dt} + T = T_f$ où $T_f = T_S + \frac{R_0 I^2}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$ et les conditions initiales permettent de résoudre cette équation sous la forme $T(t) = T_f + [T_p(\Phi_i) - T_f] e^{-t/\tau}$; sur la courbe tracée ci-après, on trouve τ en cherchant l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote horizontale :



I.C.2) τ est le temps de réponse. Si la capacité thermique augmente, τ augmente car il est plus long de refroidir (ou de chauffer) un corps susceptible d'accumuler plus d'énergie sous forme thermique. Si la conductance thermique augmente, τ diminue car une bonne conductivité de la poutre favorise un refroidissement plus rapide.

I.D. Sensibilité du bolomètre

I.D.1) Posant $T_1 = T_P(\Phi_{i0})$ et $T(t) = T_1 + \Theta(t)$ on obtient facilement $T_1 = T_S + \frac{\Phi_{i0} + R_0 I^2}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$ et $\tau \frac{d\Theta}{dt} + \Theta = \frac{\varphi_0 \cos(\omega t)}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$ dont la résolution, par exemple en notations complexes, fournit $\underline{\Theta}(1 + j\omega\tau) = \frac{\varphi_0}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$ dont la norme fournit $\Theta_0 = |\underline{\Theta}| = \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$ avec $A = \frac{\varphi_0}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$ (si on suppose $\varphi_0 > 0$).

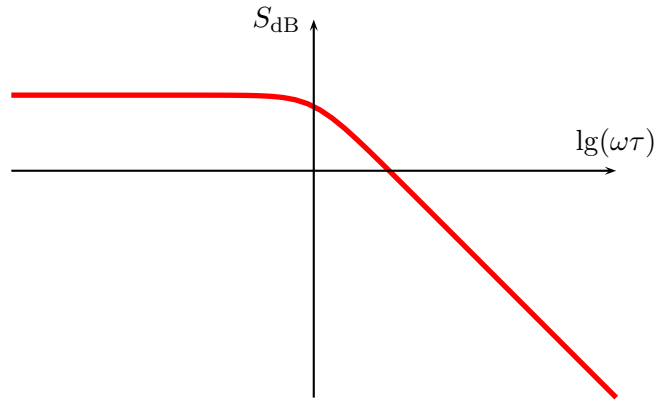
I.D.2) On a $V = R(T)I^2 = V_1 + V_0 \cos(\omega t + \psi)$ avec $V_1 = R_0 I^2 (1 + \alpha(T_1 - T_S))$ et $V_0 \cos(\omega t - \psi) = \alpha R_0 I^2 \Theta(t)$ donc $V_0 = |\alpha| R_0 I^2 \Theta_0$.

I.D.3) On en déduit immédiatement $S(\omega) = \frac{|\alpha| R_0 I^2}{G_{th} - \alpha R_0 I^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$.

I.D.4) Le diagramme de Bode est tracé page suivante.

I.D.5) On reconnaît le diagramme d'un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure $\omega_c = 1/\tau$ et de valeur maximale (ou statique) $S_{max} = \frac{|\alpha| R_0 I^2}{G_{th} - \alpha R_0 I^2}$. En dehors de la bande passante, le bolomètre ne suit pas les variations trop rapides du flux incident à cause des limitations des transferts thermiques, qui sont toujours lents.

I.D.6) On remarque que S_{max}/τ est indépendant de la conductance thermique. Si on diminue celle-ci, on augmente la sensibilité mais en même temps on augmente la constante de temps donc on diminue la rapidité du système; le choix technique résultera nécessairement d'un compromis.



II. Un télescope unitaire du VLT

II.A. Montage de type Cassegrain

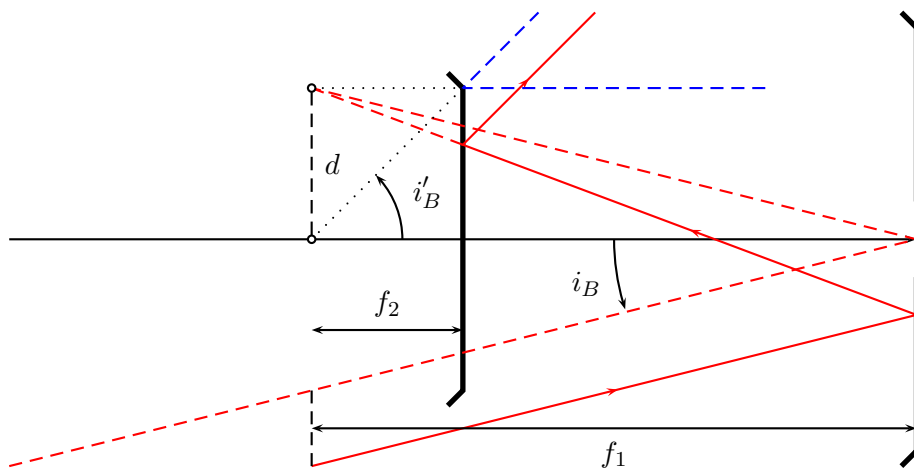
II.A.1) Dans les conditions de Gauss, le foyer est au milieu de l'intervalle formé par le sommet et le centre du miroir donc $\overline{S_1F_1} = -14,4 \text{ m}$.

II.A.2) De même $\overline{S_2F_2} = -2,26 \text{ m}$.

II.A.3) Le système est afocal, l'image de l'infini est à l'infini en passant par une image intermédiaire qui doit être à la fois le foyer image du miroir 1 et le foyer objet du miroir 2 donc $F_1 = F_2 = F$ et $\overline{S_2S_1} = \overline{S_2F} - \overline{S_1F} = 12,14 \text{ m}$.

II.A.4) L'image d'un objet vu à l'infini sous l'angle i_B est située dans le plan focal image avec pour dimension $d = f_1 i_B$; elle redonne alors une image à l'infini vue sous un angle $i'_B = d/f_2$ donc en valeur absolue $|G| = \frac{f_1}{f_2}$.

le schéma (ci-dessous) montre qu'il n'y a pas inversion de l'image donc $G = -\frac{\overline{S_1F_1}}{\overline{S_2F_2}} = 6,37$.



II.B. Résolution limitée par la diffraction

II.B.1) La tache circulaire de diffraction ou tache d'Airy a pour rayon angulaire $0,61\lambda/r_p$ où $r_p = D/2$ est le rayon de la pupille diffractante. Après projection dans le plan focal image de la lentille de focale $f'_1 = |\overline{S_1F_1}|$, on obtient donc $R = 1,22 \frac{\lambda f'_1}{D}$.

II.B.2) L'ouverture angulaire correspondante en sortie est R/f'_2 soit $\Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} G$.

II.B.3) On adopte le critère de Rayleigh : il y a résolution si l'écart angulaire $i'_B - i'_A$ est, en valeur absolue, supérieur à l'angle $\Delta\theta$, $|i'_B - i'_A| > \Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} G$.

II.B.4) Comme $i'_B - i'_A = G(i_B - i_A)$, la condition demandée est $|i_B - i_A| > i_{\min}$ où $i_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$ soit aussi $i_{\min} = 0,6''$.

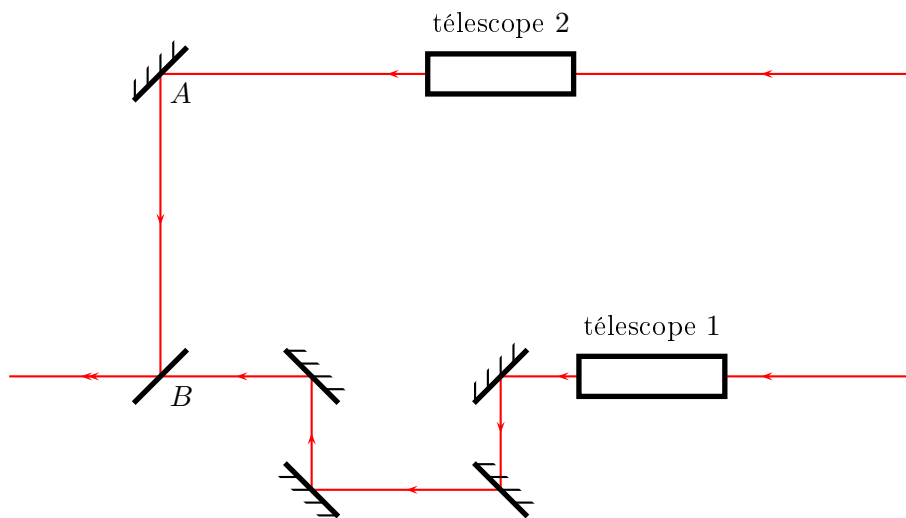
III. Le télescope interférentiel VLTI

III.A. Source ponctuelle sur l'axe optique

III.A.1) L'image d'un objet à l'infini est dans le plan focal image; il est de plus sur l'axe optique donc $A' = F'$.

III.A.2) Les rayons parvenant en F' en passant par T_1 et T_2 sont symétriques donc $\delta_0 = 0$.

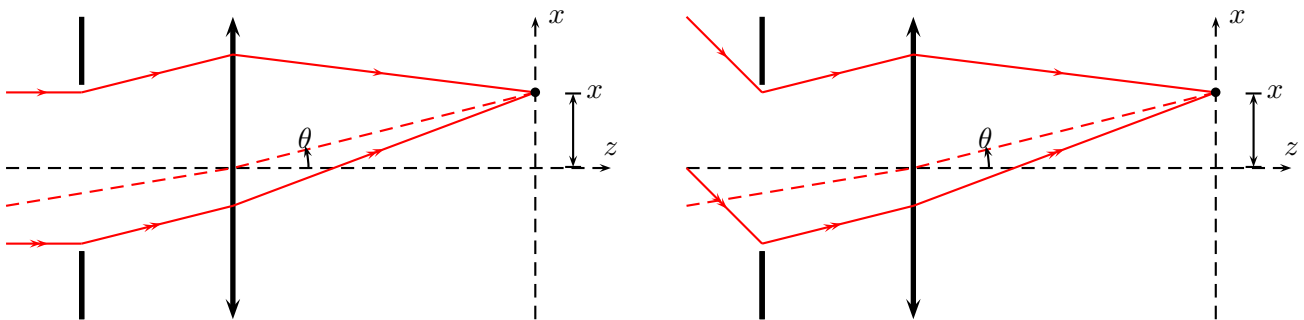
III.A.3) S'il n'y avait pas de ligne à retard, on aurait une différence de marche importante due au système de recombinaison des faisceaux, $\delta = (AB)$.



III.A.4) En l'absence de la ligne à retard, $\delta_0 = (AB)$ pourrait devenir supérieur à la longueur de cohérence, qui est à la fois la longueur moyenne des trains d'onde et la différence de marche maximale observable. Une telle situation se traduit par une perte de contraste des franges, qui cessent alors d'être observables par manque de cohérence temporelle.

III.A.5) Le contraste est égal à 1 sous trois réserves :

- les deux télescopes doivent avoir même luminosité ;
- la source est ponctuelle (pas de perte de contraste due au défaut de cohérence spatiale) ;
- la source est parfaitement monochromatique (ou bien un filtre monochromateur est interposé sur les faisceaux, pas de perte de contraste due au défaut de cohérence temporelle).



III.A.6) La formule de Fresnel (formule fondamentale des interférences à deux ondes) s'écrit dans ce cas, en notant I_0 l'éclairement qui serait obtenu en A' en présence d'un seul télescope, avec une différence de marche $\delta = a\theta$ où $\theta = x/f'_1$ (schéma ci-dessus à gauche),
$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'_1} \right] \right)$$

III.A.7) L'interfrange et la période de la fonction $I(x)$, soit $\Delta x = \frac{\lambda f'_1}{a}$.

III.A.8) En présence de trous de Young, il n'y a de lumière que sur l'axe $y = 0$ d'où une répartition formée de taches aux points de l'axe (Ox) d'abscisses $x_k = k \Delta x$, à l'intérieur de la tache de diffraction commune formée par les deux trous.

III.B. Source ponctuelle hors de l'axe optique

III.B.1) Il vient encore $x_B = f'_1 i_B$.

III.B.2) On ajoute (schéma ci-dessus à droite) à la différence de marche précédente une autre différence de marche égale à $-ai_B$; il vient donc $I = 2I_0 \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi a(x - x_B)}{\lambda f'_1} \right] \right)$ et on vérifie ainsi que l'ordre zéro est bien atteint au niveau de l'image géométrique B' de l'étoile.

III.B.3) Il y a seulement décalage global mais pas de modification de la période, l'interfrange reste inchangée.

III.C. Observation de deux sources ponctuelles

III.C.1) Non, deux sources spatialement distinctes sont **incohérentes**, aucun dispositif ne permettant de synchroniser des phases lors de l'émission d'un signal optique.

III.C.2) Du fait de la question précédente, $I_{A \cup B} = I_A + I_B$ donc, compte tenu de la relation trigonométrique $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, $I_{A \cup B} = 4I_0 \left[1 + V \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda f'_1} \left(x - \frac{x_B}{2} \right) \right) \right]$ où le terme de visibilité ou de contraste est $V = \cos \left(\frac{\pi a x_B}{\lambda f'_1} \right)$.

III.C.3) Il y a brouillage des franges (perte de contraste) si $V = 0$ donc si $\frac{\pi a x_B}{\lambda f'_1} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, ce qu'on peut

aussi écrire $a = \frac{\lambda}{2i_B} + q \frac{\lambda}{i_B}$ où $q \in \mathbb{N}$.

III.C.4) On mesure par exemple la plus petite valeur de a qui permet le brouillage et on en déduit

$$i_B = \frac{\lambda}{2a_{\min}}$$

III.C.5) Ici $a_{\min} \leq 100$ m donc $i_B > i_{\min}$ où $i_{\min} = 1,0 \cdot 10^{-8}$ rad = $0,02''$. Le pouvoir de résolution est fortement amélioré car il dépend maintenant du décalage entre télescopes et plus du diamètre de chacun d'eux.

IV. Positionnement du télescope spatial James Webb

IV.A. Étude préliminaire

IV.A.1) Pour un mouvement circulaire de période T donc de vitesse angulaire ω , l'accélération s'écrit

$\vec{a} = -\omega^2 r \vec{e}_r$. Pour la Terre dans \mathcal{R}_H , la relation $M_T \vec{a} = -\frac{GM_S M_T}{R^2} \vec{e}_R$ impose donc $T_T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_S}}$ qui

n'est autre que la troisième loi de Kepler.

IV.A.2) \mathcal{R}_0 est en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \frac{2\pi}{T_T} \vec{e}_z$ autour de l'axe fixe (Sz); ce référentiel n'est donc **pas galiléen**.

IV.B. Équilibre des forces

IV.B.1) Le mobile (le satellite) est en équilibre sous l'action des forces de gravitation (exercées par le Soleil et pas la Terre) et de la force d'inertie d'entraînement due au caractère non galiléen du référentiel. Ces trois

forces sont colinéaires entre elles et à l'axe (Sx) d'où la condition d'équilibre $\vec{0} = -\frac{GM_S m}{(R+r)^2} \vec{e}_x - \frac{GM_T m}{r^2} \vec{e}_x + m \left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 (R+r) \vec{e}_x$ donc, en remplaçant $\left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2$ par $\frac{GM_S}{R^3} : \frac{M_S}{(R+r)^2} + \frac{M_T}{r^2} = (R+r) \frac{M_S}{R^3}$.

IV.B.2) $r \ll R$ autorise un DL limité ici à l'ordre 1, $\frac{M_S}{R^2} \left(1 - \frac{2r}{R}\right) + \frac{M_T}{r^2} = \frac{M_S}{R^3} \left(1 + \frac{r}{R}\right)$ donc $\frac{M_T}{r^2} = 3 \frac{M_S r}{R^3}$

ou $r = R \left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{1/3}$.

IV.B.3) On trouve $\frac{r}{R} = 10^{-2} \ll 1$ donc les hypothèses faites sont vérifiées et $r = 1,5 \cdot 10^6$ km.

IV.C. Étude de la stabilité du point de Lagrange

IV.C.1) Les forces de gravitation sont conservatives, avec pour expressions respectives de l'énergie potentielle $E_p^S = -\frac{GM_S m}{SM}$ et $E_p^T = -\frac{GM_T m}{TM}$ où on peut exprimer $SM = \sqrt{(R+r+x)^2 + y^2 + z^2}$ et $TM = \sqrt{(r+x)^2 + y^2 + z^2}$. Compte tenu de la relation entre M_T et M_S déjà écrite, on peut proposer pour expres-

sions de ces énergies potentielles $E_p^S = -\frac{GM_S m}{\sqrt{(R+r+x)^2 + y^2 + z^2}}$ et $E_p^T = -\frac{3r^3}{R^3} \frac{GM_S m}{\sqrt{(r+x)^2 + y^2 + z^2}}$.

La force d'inertie d'entraînement est $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ où l'accélération d'entraînement est celle d'un mouvement circulaire de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, donc $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 \vec{H\vec{M}}$, où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe (Sz); on peut donc écrire $\vec{F}_{ie} = m \left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 [(R+r+x)\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$ ou encore, au vu de la relation

de Kepler, $\vec{F}_{ie} = \frac{GM_S m}{R^3} [(R+r+x)\vec{e}_x + y\vec{e}_y]$ qui est évidemment conservative, $\vec{F}_{ie} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{ie}$ avec

$$E_{ie} = -\frac{GM_S m}{2R^3} [(R+r+x)^2 + y^2].$$

IV.C.2) Les expressions proposées ne sont pas homogènes (il manque la constante de gravitation G); nous nous contenterons ici de discuter du signe du coefficient α dans une expression du type $F_x = \alpha m x$. Si on peut négliger la force de Coriolis, ce terme impose l'équation dynamique $\ddot{x} - \alpha x = 0$, dont la solution est bornée (et donc correspond à un mouvement stable) seulement si $\alpha < 0$. Avec les signes des expressions de l'énoncé, on en déduit que le mouvement est stable relativement à des perturbations selon \vec{e}_y et \vec{e}_z mais instable le long de (Sx): le mouvement du télescope spatial devra être asservi.

V. Refroidissement cryogénique du télescope Herschel

V.A. Principe d'un interrupteur thermique

V.A.1) T ne dépend que de la variable spatiale r donc le courant thermique est $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$. Le système formé, sur une longueur h , du gaz contenu entre r et $r + dr$ évolue donc conformément au premier principe $dU = \delta W + \delta Q$ où $\delta W = 0$; $dU = \rho d\tau c_v \frac{\partial T}{\partial t} dt$ (c_v est une grandeur massique), $d\tau = 2\pi r dr h$ tandis que

$\delta Q = dt [j_{th}(r, t) 2\pi r - j_{th}(r + dr, t) 2\pi (r + dr)] h$. Après simplification, il vient $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$

qui est l'équation de diffusion thermique, $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T$.

V.A.2) En régime permanent, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc $r \frac{dT}{dr} = cte$ qui s'intègre en $T = a \ln r + b$ ou, compte tenu des

conditions aux limites $T(R_1) = T_i$ et $T(R_2) = T_c$, $T(r) = T_i + (T_c - T_i) \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$.

V.A.3) On en déduit $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = (T_i - T_c) \frac{\lambda}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \vec{e}_r$ dont le flux à travers un cylindre de rayon r et

de longueur h est $\Phi = \frac{2\pi\lambda h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} (T_i - T_c)$.

V.A.4) Vu l'orientation définie ici pour le calcul de Φ , on a $G = \frac{\Phi}{T_i - T_c}$; on en déduit $G = \frac{\pi\lambda h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$, en

position fermé.

V.A.5) On remarquera que, comme $R_2 \simeq R_1$, la conductance thermique est très élevée; en position fermée, l'interrupteur est presque un court-circuit thermique. Par contre, en l'absence de gaz, les transferts thermiques se font que par rayonnement, avec (dans l'hypothèse d'un comportement en absorbeur intégral des deux surfaces en regard) $\Phi = 2\pi R_1 h \sigma (T_i^4 - T_c^4) \simeq 8\pi R_1 h \sigma T_i^3 (T_i - T_c)$ d'où une conductance thermique

$G' \simeq 8\pi R_1 h \sigma T_i^3$, qui est faible si T_i est assez faible; en position ouverte, l'interrupteur est presque un isolant thermique parfait.

V.B. Choix du fluide réfrigérant

V.B.1) Pendant le pompage, il y a toujours équilibre donc le point représentatif se déplace le long de la courbe d'équilibre liquide-vapeur, la pression et la température diminuant simultanément.

V.B.2) La particularité demandée est l'existence de deux phases liquides distinctes, fluide et superfluide.

V.B.3) Considérons une masse $m(t)$ d'hélium entièrement liquide à l'instant t à la température $T(t)$. À l'instant $t + dt$, on a une masse $m + dm$ (avec $dm < 0$) qui est encore liquide à $T(t + dt)$ et la masse $-dm$ qui est présente sous forme de vapeur à la même température $T(t + dt)$. L'ensemble est thermiquement isolé; en négligeant l'influence des variations de pression sur les grandeurs énergétiques (mais le peut-on?) on en conclut qu'il évolue à enthalpie constante. La variation d'enthalpie de la phase qui reste liquide est $(m + dm)c_{\text{liq}}dT \simeq m(t)c_{\text{liq}}dT$ (au premier ordre non nul) tandis que la variation d'enthalpie de la quantité $-dm$ qui se vaporise est $-dm\ell_{\text{vap}}$. On a donc $-dm\ell_{\text{vap}} + mc_{\text{liq}}dT = 0$ qui s'intègre depuis l'état initial en

$$\ell_{\text{vap}} \ln \frac{m(t)}{m_0} = c_{\text{liq}}(T(t) - T_0).$$

V.B.4) Supposons (faute de mieux) que c_{liq} a même valeur pour les deux isotopes; on a alors un abaissement de température plus élevé (pour une même masse vaporisée) pour l'hélium 4 qui semble donc ici le plus efficace.

V.B.5) On voit sur le diagramme proposé qu'on peut atteindre une valeur d'équilibre (sous 0,1 bar) égale à 0,3 K avec de l'hélium 3, contre 0,8 K avec de l'hélium 4. Bien que moins efficace (il absorbe moins de chaleur en vaporisant), l'hélium 3 permet d'atteindre une température finale plus basse et c'est donc lui qu'on choisira.

V.C. Fonctionnement du cryo-réfrigérateur

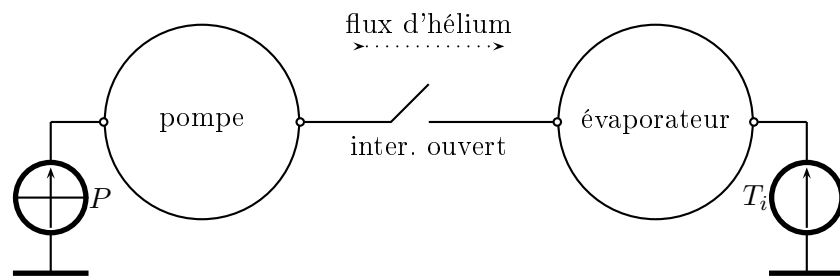
V.C.1) La masse vaporisée est $m_0 - m(t)$; on déduit de ce qui précède $\ln \frac{m_0}{m_0 - m_{\text{evap}}} = \frac{c_{\text{liq}}}{\ell_{\text{evap}}}(T_0 - T)$ donc

$$m_{\text{evap}} = m_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{c_{\text{liq}}(T_0 - T(t))}{\ell_{\text{evap}}}\right) \right].$$

V.C.2) L'extraction de chaleur ayant été réalisée par vaporisation, on posera $Q_{\text{ext}} = m_{\text{evap}}\ell_{\text{evap}}$.

V.C.3) Le rendement est le quotient de la grandeur « utile » Q_{ext} par la grandeur payée, correspondant au chauffage avec la puissance P pendant la durée τ_1 , et $\eta = \frac{Q_{\text{ext}}}{P\tau_1}$.

V.C.4) Le schéma « technique » équivalent à la phase 1 correspond à un interrupteur thermique ouvert, deux températures fixées et un transfert d'hélium vers la droite (schéma page suivante).



V.C.5) Avec le même type de conventions, le système est représenté ci-dessous pendant la phase 2.

