Exercice 1 : Grandeurs du chapitre ; unités
Recopier et compléter le tableau suivant :

Notation	Nom de la grandeur	Unité
N		
n		
ϕ		
$\overrightarrow{j_N}$		
p		
$\frac{\partial n}{\partial t}$		
$\text{div}(\overrightarrow{j_N})$		
$\overrightarrow{\text{grad}}(n)$		
D		
Δn		

Exercice 2 : Applications numériques
On donne $N_A = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}, $R = 8,314$ J.K^{-1}mol^{-1} et $e = 1,602.10^{-19}$ C.

1. La pression de vapeur saturante de l'eau à 30°C est $P_s = 42,4.10^3$ Pa. Calculer la densité particulaire en molécules d'eau au-dessus d'une flaque d'eau à cette température.
2. ($*$) Une goutte d'éther, composé volatile moléculaire de masse molaire $M = 74.10^{-3}$ kg.mol^{-1} est posée sur le sol elle se vaporise de façon isotrope avec un débit massique $D_m = 1,0$ mg.s^{-1}. Déterminer le vecteur densité de courant particulaire en un point M situé à $r = 1,0$ m de la goutte. On donne la surface d'une demi-sphère : $S = 2\pi r^2$.
3. La masse volumique du cuivre est $\mu = 8960$ kg.m^{-3} et sa masse molaire $M = 63,5.10^{-3}$ kg.mol^{-1}. On interprète sa conductivité en supposant que chaque atome libère un électron de conduction. Calculer la densité particulaire en électrons de conduction.
4. Un fil cylindrique conducteur d'axe (Ox) et de section $S = 10$ mm^2 est parcouru dans le sens des x croissants par un courant d'intensité $i = 50$ mA. Donner l'expression du vecteur densité de courant électrique volumique $\overrightarrow{j}$ et celle du vecteur densité de courant particulaire électronique $\overrightarrow{j_p}$. Faire les applications numériques.

Exercice 3 : Maîtriser les outils mathématiques (1/2)
Les questions suivantes sont indépendantes. Dans cet exercice, pour avoir des expressions homogènes, on considère que tous les paramètres $(x, y, r, \theta \ldots)$ sont sans dimension. Pour répondre aux questions, utiliser si besoin les formulaires présents dans les documents des chapitres M2 et T2. Mais au final il faut y arriver seul !

1. En coordonnées cartésiennes, donner l'expression de $\overrightarrow{\text{grad}} f$ pour $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + z$.
2. En coordonnées cylindriques, donner l'expression de $\overrightarrow{\text{grad}} f$ pour $f(r, \theta, \phi) = \frac{\cos\theta}{r^2}$.
3. En coordonnées cartésiennes, donner l'expression de $\text{div}\,\overrightarrow{a}$ pour $\overrightarrow{a}(yz^2, x + 3y, xz^2)$.
4. En coordonnées sphériques, donner l'expression de $\text{div}\,\overrightarrow{a}$ pour $\overrightarrow{a}(2, r, \sin\theta)$.
5. En coordonnées cartésiennes, donner l'expression de Δf pour $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + z$.
6. En coordonnées sphériques, donner l'expression de Δf pour $f(x, y, z) = r\cos\theta$.

Exercice 4 : Maîtriser les outils mathématiques (2/2)
Dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme, on montre que la densité particulaire en tout point M s'écrit $n(x,y,z) = n_0 e^{-z/H}$, où n_0 est la densité particulaire au niveau du sol, z l'altitude et H la hauteur caractéristique du modèle. Exprimer le nombre total N de particules dans un parallélépipède de longueur a, de largeur b et de hauteur infinie. On calculera pour cela l'intégrale triple :

$$N = \iiint n.dV = \int_0^a \int_0^b \int_0^\infty n_0 e^{-z/H} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Exercice 5 : Longueur de diffusion
Des particules diffusent selon l'axe (Ox) avec un coefficient de diffusion uniforme D, $n^*(x,t)$ représente leur concentration (nombre de particules par unité de volume).

1. Rappeler la loi de Fick et utiliser la conservation du nombre de particules pour montrer que : $\frac{\partial n^*}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}$. Que devient cette relation si D dépend de x ?

La diffusion a lieu, maintenant, dans un milieu absorbant caractérisé par $\sigma(x,t) = An^*(x,t)$ qui représente le nombre de particules absorbées par unité de temps et unité de volume, A est une constante positive.

2. Préciser l'unité de A.
3. Écrire l'équation de diffusion des particules dans ce milieu (où D est uniforme). On se place maintenant en régime stationnaire.
4. Déterminer $n^*(x)$, on posera $n^*(x=0) = n_0^*$
5. On appelle longueur de diffusion la distance d que doivent parcourir les particules dans ce milieu pour que leur concentration soi divisée par e. Exprimer cette longueur de diffusion.

Exercice 6 : Diffusion de neutrons
On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe Ox et de section droite d'aire S, s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. On note $n(M,t)$ le nombre de neutrons par unité de volume. Cette diffusion satisfait la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion $D = 22\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$.
D'autre part, du fait des réactions nucléaires entre les neutrons et la matière, des neutrons sont produits : pendant une durée $\mathrm{d}t$, dans un élément de volume $\mathrm{d}V$, il apparaît $\delta^2 N_p = Kn(M,t)\mathrm{d}V\mathrm{d}t$ neutrons, où $K = 3,5.10^4\ \mathrm{s}^{-1}$ est un constante caractéristique des réactions nucléaires.
On admettra en première approximation que n doit s'annuler à tout instant aux extrémités du cylindre ($x = 0$ et $x = L$). En revanche on supposera que $n(x,t)$ ne s'annule pas à l'intérieur du cylindre.

1. Montrer que $n(x,t)$ est solution de l'équation : $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Kn$.
2. (a) Expliciter l'équation satisfaite par $n(x)$ en régime stationnaire. On posera $\delta = \sqrt{\frac{D}{K}}$. Quelle est l'unité de δ ?
   (b) Donner les solutions $n(x)$ dans ce cas, à une constante multiplicative près.
   (c) Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière L_s de la longueur L du barreau, et calculer L_s.
3. $(*)$ En régime quelconque, on cherche une solution de la forme $n(x,t) = h(x)\exp(-t/\tau)$. Déterminer $h(x)$ et τ. En déduire que $n(x,t)$ diverge si L est supérieur à L_s.