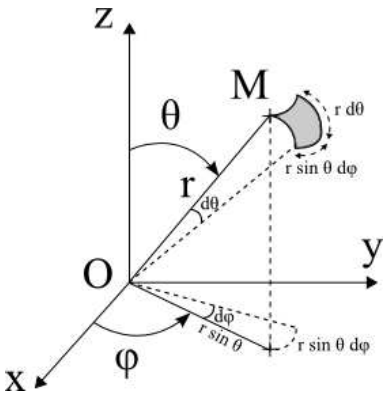
Exercice 1 : Outils mathématiques
En coordonnées sphériques la surface élémentaire s'écrit $\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$.



1. Vérifier l'homogénéité de cette expression.
2. On cherche à intégrer cette expression pour obtenir la surface S d'une sphère de rayon r.
   (a) Quelles sont les bornes de l'intégrale (double) pour θ et ϕ afin de décrire toute la sphère ? Se référer si besoin à la définition des coordonnées sphériques.
   (b) Calculer l'intégrale et montrer que $S = 4\pi r^2$.

Exercice 2 : Loi de Wien
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Lorsqu'on chauffe un morceau de fer, il devient progressivement rouge sombre, puis rouge plus vif, et à plus haute température encore, « blanc ». Pourquoi ?
2. Bételgeuse est une étoile de couleur rouge, le Soleil de couleur jaune et Rigel de couleur bleue. Quelle est l'étoile la plus « chaude » ? Justifier.
3. Le *fond diffus cosmologique* est un rayonnement électromagnétique présent dans tout l'univers qui a été émis environ 380 000 ans après le Big Bang (faire une recherche Wikipedia pour plus d'informations sur ce phénomène physique de grande importance en cosmologie). Sa longueur d'onde actuelle pour le maximum d'émission est $\lambda_m = 1,07$ mm (micro-ondes).Calculer la température du corps noir correspondant au fond diffus cosmologique.

Exercice 3 : Loi de Stefan
On assimile dans cet exercice la peau d'un être humain à un corps noir pour raisonner en ordre de grandeur.

1. Estimer la surface de peau d'un être humain.
2. En déduire une estimation en ordre de grandeur de la puissance rayonnée par un être humain.
3. Par quoi cette énergie perdue est-elle compensée ?

Exercice 4 : Effet de serre terrestre : un modèle n°3, plus élaboré
La température de surface du Soleil vaut $T_S = 5778$ K et son rayon $R_S = 6,957.10^8$ m. La distance Soleil-Terre est $r = 1,496.10^{11}$ m. On modélise l'atmosphère terrestre par une couche gazeuse transparente dans le visible (correspondant à l'essentiel du rayonnement solaire) mais absorbant dans l'infrarouge avec un coefficient $a = 0,9$. Par ailleurs on note $A = 0,34$ l'albedo terrestre (albedo de Bond, tenant compte de la position polaire des glaces), coefficient de réflexion de l'énergie solaire incidente par le sol.

1. (a) Exprimer la puissance solaire totale P_i reçue par la Terre en fonction de T_S, R_S, r et R_T, le rayon de la Terre. On considérera que la surface recevant cette puissance est un disque.
   (b) Dessiner un schéma faisant apparaître le sol terrestre, l'atmosphère et les différentes puissances en jeu en tenant compte des coefficients a et A. On notera P_e la puissance totale émise par le sol terrestre, et $2P_a$ la puissance totale émise par l'atmosphère (se répartissant équitablement vers l'espace et le sol).
   (c) Écrire les deux équations traduisant le bilan radiatif du sol terrestre puis de l'atmosphère, puis les combiner pour montrer que :
   $$P_e = \frac{1-A}{1-\frac{a}{2}} P_i.$$
   (d) En déduire la température (moyenne) T_T du sol terrestre. Commenter la valeur trouvée.
2. (a) On suppose que la quantité de dioxyde de carbone dans l'atmosphère diminue beaucoup. Quelle grandeur serait modifiée ? Quelle serait la conséquence sur la température terrestre ? Quelle serait la conséquence sur les océans ? Sur l'albédo ? Le phénomène climatique irait-il en s'amplifiant ou en s'atténuant ?
   (b) On suppose que la quantité de dioxyde de carbone dans l'atmosphère augmente beaucoup. Quelle grandeur serait modifiée ? Quelle serait la conséquence sur la température terrestre ? Sur les calotte glaciaire ? Sur l'albédo ? On estime qu'un réchauffement des sols gelés favoriserait le relargage dans l'atmosphère de grosses quantités de méthane emprisonné dans le sol. Le phénomène climatique irait-il en s'amplifiant ou en s'atténuant ?

Exercice 5 : (∗) Les lois du rayonnement du corps noir

Les ondes électromagnétiques ou les photons en équilibre radiatif dans une enceinte à la température T ont *a priori* toutes les longueurs d'onde λ et dons aussi toutes les fréquences ν possibles. La contribution élémentaire des ondes de fréquence comprise entre ν et $\nu + \mathrm{d}\nu$, ou de longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ au flux surfacique (en W.m^{-2} ou puissance surfacique) émis par un corps noir s'écrit :

$$\mathrm{d}\phi = \phi_\lambda(\lambda, T).\mathrm{d}\lambda = \phi_\nu(\nu, T).\mathrm{d}\nu$$

où $\phi_\lambda(\lambda, T)$ est appelée densité spectrale en longueur d'onde du flux surfacique. Elle est donnée par la loi de Planck :

$$\phi_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}.$$

1. Donner le nom des constantes c, k_B et h.
2. Établir la relation entre $\mathrm{d}\lambda$ et $\mathrm{d}\nu$ (pris positifs tous les deux) et en déduire l'expression de la densité spectrale en fréquence du flux surfacique $\phi_\nu(\nu, T)$.
3. Poser $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ et effectuer l'intégration sur toutes les fréquences du spectre : $\phi(T) = \int_0^\infty \phi_\nu(\nu, T).\mathrm{d}\nu$ à l'aide de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$.
   Montrer qu'elle conduit à la *loi de Stefan* $\phi(T) = \sigma T^4$ et donner l'expression de la constante de Stefan σ. Faire l'application numérique sachant que : $k_B = 1,381.10^{-23}$ J.K^{-1}, $h = 6,626.10^{-34}$ J.s et $c = 2,998.10^8$ m.s^{-1}.
4. En posant toujours $x = \frac{h\nu}{k_B T} = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ montrer que la densité spectrale $\phi_\lambda(\lambda, T)$ en longueur d'onde du flux surfacique passe par un maximum pour une longueur d'onde λ_m telle que $\lambda_m T = A$, appelée *loi de Wien*.
   Pour cela on indique que la solution de l'équation $\mathrm{e}^x - 1 = \frac{x}{5}\mathrm{e}^x$ est $x \approx 4,964$. Évaluer la constante A en μm.K avec 3 chiffres significatifs.