

Méthodes à retenir :

- Pour justifier que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, il suffit de vérifier que l'intersection est réduite au vecteur nul, et que la somme des dimensions est celle de l'espace vectoriel considéré, en dimension finie.
- La notion de stabilité d'un sous-espace vectoriel  $F$  par un endomorphisme est équivalente à la présence d'un bloc de zéros dans une base adaptée à une somme directe entre  $F$  et un supplémentaire.
- Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme, et la relation entre ces matrices est la formule de passage vue en PCSI.

## I. Sommes directes

### Exercice 1 ☆

On note  $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $F = \{\lambda I_2; \lambda \in \mathbb{R}\}$  et  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ .

1. Justifier que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .
2. A-t-on  $F \oplus G = F + G$  ?
3. A-t-on  $F \oplus G = E$  ?

### Exercice 2 ☆☆

Soit  $E$  un espace vectoriel quelconque et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que :  $f \circ f = f$ .

1) Démontrer que :  $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ .

Qu'en déduit-on pour la nature de  $f$  ? Illustrer géométriquement.

- 2) Si  $E$  est de dimension finie, sous quelle forme simple s'écrit la matrice de  $f$  dans une base adaptée à cette somme directe ?
- 3) Donner un exemple d'endomorphisme  $f$  tel que  $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$  mais  $f \circ f \neq f$ .
- 4) Donner un exemple d'endomorphisme  $f$  qui ne vérifie pas  $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ .

### Exercice 3 ☆☆

1. Donner la définition de deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel  $E$ .
2. On considère maintenant l'espace vectoriel  $E$  des fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $F = \{f \in E | f(0) = f'(0) = 0\}$  et  $G = \{g : x \mapsto ax + b; (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$ .  
Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

### Exercice 4 ☆☆☆ « matrices symétriques et antisymétriques »

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $\mathcal{A}_n = \{R \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); R^T = -R\}$  et  $\mathcal{S}_n = \{S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); S^T = S\}$ .

1. Justifier que toute matrice  $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  peut s'écrire dans la somme  $\mathcal{A}_n + \mathcal{S}_n$  sous la forme :  $Q = R + S$ , avec  $R = \frac{1}{2}(Q - Q^T)$  et  $S = \frac{1}{2}(Q + Q^T)$ .
2. Justifier que la décomposition précédente est unique.
3. En déduire que  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$ .
4. Justifier que la famille  $\mathcal{B}_a = (E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{A}_n$ .
5. Justifier que la famille  $\mathcal{B}_s = ((E_{ii})_{1 \leq i \leq n}, (E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n})$  est une base de  $\mathcal{S}_n$ .
6. En déduire une base adaptée à la décomposition en somme directe  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$ .

## II. Sous-espaces stables

### Exercice 5 ☆☆

Prouver qu'il existe un seul endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  tel que  $\text{Ker } u$  est engendré par  $X^2 - 1$  et  $X^2 + 1$  et tel que  $u(X) = 2X$ .

Quelle est sa matrice  $M$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  ?

Quels sous-espaces vectoriels stables apparaissent dans cette écriture matricielle ?

### Exercice 6 ☆☆☆

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Comparer pour l'inclusion les sous-espaces vectoriels  $E_1 = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ ,  $E_2 = \text{Ker}((f - \text{id}_E)^2)$  et  $E_3 = \text{Ker}((f - \text{id}_E)^3)$ .
2. Déterminer une base de  $E_1$ .
3. En déduire un supplémentaire  $S_1$  de  $E_1$  dans  $E_2$  et une base adaptée à la somme directe  $E_2 = E_1 \oplus S_1$ .
4. En déduire un supplémentaire  $S_2$  de  $E_2$  dans  $E_3$  et une base adaptée à la somme directe  $E_3 = E_2 \oplus S_2$ .
5. Déterminer la matrice de  $f$  dans une base adaptée à la somme directe  $E = E_1 \oplus S_1 \oplus E_2$ .

### Exercice 7 ☆☆☆

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. On suppose que  $f + f^2 + f^3 = O_{\mathcal{L}(E)}$ .

1.  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ .
2. Justifier que  $F = \text{Im}(f)$  est stable par  $f$ .
3. Montrer que l'endomorphisme  $g = f|_F^F$  induit par  $f$  sur  $F$  est un automorphisme de  $F$ .

## III. Déterminant

### Exercice 8 ☆

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée telle qu'il existe un entier  $p \geq 1$  tel que  $A^p = 0_n$ . (matrice nilpotente d'indice  $p$ ). Calculer  $\det A$ .

### Exercice 9 ☆

Calculer :  $\Delta_n = \begin{vmatrix} \ln(2) & \ln(3) & \ln(4) & \dots & \ln(n) \\ 0 & \ln(3) & \ln(4) & & \vdots \\ 0 & 0 & \ln(4) & \ddots & \ln(n) \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ln(n) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \ln(n) \end{vmatrix}$  ;

### Exercice 10 ☆

Factoriser  $\Gamma = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^4 \end{vmatrix}$

### Exercice 11

Soit  $n \geq 2$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\det(M^T) = \det(M)$ .
2. On suppose que la matrice  $M$  est antisymétrique (i.e.  $M^T = -M$ ) et non nulle.
  - (a) Montrer que si  $n$  est impair alors  $M$  n'est pas inversible.
  - (b) Montrer que si  $n = 2$ , alors  $M$  est inversible.
  - (c) Si  $n = 4$ , peut-on affirmer que  $M$  est inversible ? qu'elle ne l'est pas ?

**Exercice 12** ★★★

Calculer sous forme factorisée l'expression de

$$P(x) = \det(xI_3 - M), \text{ où } M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de  $x$  la matrice  $xI_3 - M$  est-elle non inversible ?

**Exercice 13** ★★★

Soient  $a, b \in \mathbb{C}^*$  distincts.

$$\text{On pose } D_1 = a + b, D_2 = a^2 + ab + b^2, \text{ et pour } n \geq 3, D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Calculer  $D_n$  en fonction de  $n \geq 1$ .

**Exercice 14** ★★★ « Matrices de transvection »

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $C_1, \dots, C_n$  ses vecteurs colonnes, et  $L_1, \dots, L_n$  ses lignes. Soient  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , avec  $i \neq j$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $T_{i,j,\lambda} = I_n + \lambda E_{i,j}$ .

- 1) Justifier que  $T_{i,j,\lambda}$  est inversible.
- 2) A quelle opération élémentaire sur  $M$  correspond la multiplication à droite par  $T_{i,j,\lambda}$  ? Comparer  $\det(MT_{i,j,\lambda})$  et  $\det(M)$ .
- 3) A quelle opération élémentaire sur  $M$  correspond la multiplication à gauche par  $T_{i,j,\lambda}$  ? Comparer  $\det(T_{i,j,\lambda}M)$  et  $\det(M)$ .

## IV. Trace

**Exercice 15** ★★ « Application transposée »

Rappeler la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ . Ecrire dans cette base la matrice de l'application linéaire  $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $M \mapsto M^T$ , puis calculer  $\det(f)$  et  $\text{tr}(f)$ .

**Exercice 16** ★★ Trace et rang d'un projecteur

Soit  $p$  un projecteur de  $E$  de dimension  $n$ , et  $r = \text{rg}(p)$ .

En utilisant que  $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$ , à l'aide d'une base adaptée, démontrer que  $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$ .

**Exercice 17** ★★★★★

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que l'application  $\varphi : M \mapsto \text{Tr}(AM)$  est une forme linéaire sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que pour toute forme linéaire  $\psi$  sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  il existe une unique matrice  $A$  telle que :  $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \psi(M) = \text{Tr}(AM)$ .

## V. Pour aller plus loin

### Exercice 18 ☆☆ Nilpotents

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension finie  $n \geq 2$ .

On suppose que la composée  $n$  fois  $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$  (on dit que  $u$  est nilpotent d'ordre  $n$ ).

- Justifier qu'il existe un vecteur  $\vec{x}$  de  $E$  tel que  $u^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$ .
- On fixe alors un tel vecteur  $\vec{x}$ . Justifier que la famille  $\mathcal{F} = (\vec{x}, u(\vec{x}), \dots, u^{n-1}(\vec{x}))$  est une famille libre de  $E$ .
- En déduire une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice 19 ☆☆☆☆

Soient  $n$  un entier,  $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , et soit  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ . Montrer que  $\det(M) \neq 0$ . En déduire que  $M$  est inversible. Calculer son inverse.

(on pourra le chercher sous la forme  $\begin{pmatrix} A^{-1} & (*) \\ 0_n & B^{-1} \end{pmatrix}$ )

### Exercice 20 ☆☆☆☆

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent, c'est à dire tel qu'il existe un entier  $p \geq 1$  tel que  $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

- Montrer que  $\text{Id}_E - f$  est inversible.
- Même question pour  $\text{Id}_E + f$

### Exercice 21 ☆☆☆☆

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u, v$  deux endomorphismes de  $E$  démontrer que  $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u+v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ . (on comparera  $\text{Im } u + \text{Im } v$  et  $\text{Im}(u+v)$ , puis on pourra utiliser  $u+v$  et  $-v$ , en remarquant que  $\text{rg}(u) = \text{rg}(-u)$ )

### Exercice 22 ☆☆☆☆

Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux applications linéaires respectivement de  $E$  vers  $F$  et de  $F$  vers  $E$  telles que  $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$  et  $\psi \circ \varphi \circ \psi = \psi$ ; démontrer que  $F = \text{Im } \varphi \oplus \text{Ker } \psi$ , et si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, comparer  $\text{rg } \varphi$  et  $\text{rg } \psi$

### Exercice 23 ☆☆☆ Mines-Ponts 2018

$u$  et  $v$  sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . On suppose  $u \circ v = v \circ u$  et  $v$  est nilpotent.

- Montrer que  $u+v$  est inversible ssi  $u$  est inversible.

# Notes

<sup>2</sup> correction : 3) n'importe quelle bijection autre que l'identité  
4) par exemple la dérivation dans  $\mathbb{R}[X]$ .

<sup>6</sup> correction : Partant de  $M$ ,  $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$   $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

arriver par noyaux emboîtés à  $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  via changement de bases dans une base adaptée.

<sup>11</sup> correction : contre-exemples.  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

<sup>12</sup> correction :

$$(x+1)(x^2-4x+4) = (x+1)(x-2)^2$$

<sup>13</sup> correction : développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient  $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} r^2 - (a+b)r + ab = (r-a)(r-b)$  d'où  $D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$

<sup>16</sup> correction : on écrit les colonnes

<sup>18</sup> correction :

<sup>20</sup> correction :  $(\text{Id}_E - f) \sum_{k=0}^{p-1} f^k = \text{Id}_E - f^p = \text{Id}_E$

$$(\text{Id}_E + f) \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f^k = \text{Id}_E - f^p = \text{Id}_E + (-1)^{p-1} f^p = \text{Id}_E$$

<sup>23</sup> correction : 1. Si  $u$  inversible, pour  $w = u^{-1}v$ , on a  $u+v = u(id+w)$ , et comme  $v^p = 0$ , on a par commutation  $w^p = 0$ , donc  $(id+w)$  inversible d'inverse  $id - w + \dots + (-1)^{p-1} w^{p-1}$ .

réciroquement,  $u = u + v + (-v)$  et  $-v$  est nilpotent.