Méthodes à retenir :

- Savoir exprimer avec ε les limites dans un e.v.n.
- Savoir exprimer avec ε la continuité d'une application f allant d'une e.v.n. vers un autre.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Démontrer que sur $\mathbb{R}^2$, l'application N de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $N(x,y)=\sup(|x+y|,|x|,|y|)$ est une norme, puis dessiner la boule unité ouverte :

$$B(0,1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; N((x,y)-(0,0))<1\}$$

Exercice 2

En remarquant que $\|\ \|_\infty : M\mapsto \max\{|M_{ij}|,\ i,j\in[\![1,n]\!]\}$ est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, étant donnée une suite $(M_p)_p$ de matrices qui converge vers une limite M, comment peut-on quantifier cette limite, avec $\varepsilon>0$?

II. A savoir rédiger

Exercice 3 ☆☆ *Norme matricielle*

1. Démontrer que l'application $N : M \longmapsto \sqrt{\mathrm{tr}(M^TM)}$ définie une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si une suite matricielle $(M_p)_p$ converge vers une matrice limite M, que dire de la suite réelle $\left(\sqrt{\mathrm{tr}(M_p^TM_p)}\right)_p$?

III. Exercices

Exercice 4 *Boule unité en dimension finie*

On rappelle que les normes N_1, N_2, N_∞ sur $\mathbb{R}^3$ sont définies pour tout $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ par les expressions : $N_2(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$,
$N_1(x)=|x_1|+|x_2|+|x_3|$ et
$N_\infty(x)=\max\limits_{1\le i\le 3}|x_i|$

1) Dessiner les ensembles :
$B_1=\left\{x\in\mathbb{R}^3,\ N_1(x)<1\right\}$,
$B_2=\left\{x\in\mathbb{R}^3,\ N_2(x)<1\right\}$ et
$B_\infty=\left\{x\in\mathbb{R}^3,\ N_\infty(x)<1\right\}$

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^3$, on a :
$N_\infty(x)\le N_2(x)\le\sqrt{3}\ N_\infty(x)$, et
$N_\infty(x)\le N_1(x)\le 3\ N_\infty(x)$

Exercice 5

Donner le domaine de continuité le plus grand possible de la fonction :
$f:(x,y)\mapsto \ln(1-x^2-y^2)$

Exercice 6

1) Étudier la continuité en (0,0) de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2) Étudier la continuité en (0,0) de la fonction $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y)=\begin{cases}xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

IV. Pour aller plus loin

Exercice 7 *Normes Vectorielles*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

1. Vérifier que $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes.
2. Montrer que :
   $\forall X \in E,\ \|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty$
3. Montrer que :
   $\forall X \in E,\ \|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty$

Exercice 8

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On rappelle que : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{d}t}$ et $\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$ sont des normes sur E.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et
   $f_n : t \longmapsto \begin{cases} 1 - nt & \text{si} \quad t \in [0,1/n] \\ 0 & \text{si} \quad t > 1/n \end{cases}$
   Montrer que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$
3. Les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_2$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 9 *Normes en dimension infinie*

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $N; f \longmapsto \int_0^1 e^x |f(x)| \mathrm{d}x$

1. Montrer que N est une norme.
2. pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
   $$f_n : x \longmapsto \begin{cases} = & 1 - nx \quad \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ = & 0 \quad \text{si } \dfrac{1}{n} < x \end{cases}$$
   (a) tracer les graphes de f_4 et f_{10}.
   (b) Déterminer les suites $(N(f_n))_n$ et $(\|f_n\|_\infty)_n$.
   (c) les normes N et $\| \ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 10 *point fixe contractant*

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\| \ \|$ une norme sur E. Soit $f : E \to E$ telle qu'il existe $k \in]0,1[$ et $a \in E$ vérifiant :
$f(a) = a$;
$\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.
Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 11 *fonctions höldériennes*

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\| \ \|$ une norme sur E. Soit $h : E \to E$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :
$\forall (x,y) \in E^2,\ \|h(x) - h(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha$. Montrer que h est continue sur E.

Notes

[1] correction : préciser les bords