I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆☆

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires indépendantes de loi $b(p)$ pour $p \in]0,1[$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, On note (E_k) l'évènement " le premier succès lors de tirages successifs indépendants à pile ou face avec probabilité de succès p est obtenu au k-ième lancer".

Ecrire (E_k) à l'aide des symboles $\bigcap, \bigcup$ et des évènements $\{X_i = 1\}$ et $\{X_i = 0\}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 ☆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, pour $\lambda > 0$ fixé.

Déterminer la loi de $2X$, son espérance et sa variance.

Exercice 3 ☆

Déterminer la fonction de répartition et la série génératrice d'une variable X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 4 ☆

On note S la somme de deux dés équilibrés.

1. Déterminer la loi de S.
2. Déterminer l'espérance de S.
3. Déterminer la variance de S.

II. A savoir rédiger

Exercice 5 ☆☆ *CCP PSI 2015*

Soit $a > 0$. On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}[X = n] = \frac{a}{n(n+1)}$$

.

1. Déterminer la valeur de a.
2. X admet-elle une espérance ? Une variance ?
3. Déterminer la série génératrice.

Exercice 6 ☆☆

Soit X une variable aléatoire discrète, valeurs dans $\mathbb{N}$.

Justifier que si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $\mathbb{E}[X]$ aussi, et que X admet une variance.

III. Exercices

Exercice 7 ☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)$$

Exercice 8 ☆

A partir la fonction génératrice d'une variable X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, déterminer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$, et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 9 ☆☆

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage.
Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?

Exercice 10 ☆☆☆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, pour $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X \leq n] = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^n \,\mathrm{d}x$$

Exercice 11 *approximation binomiale-Poisson* ☆☆

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées ; on estime à 0.1% la proportion de plaques inutilisables. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard.

1. Pour $n = 2000$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N "nombre de plaques inutilisables parmi les 2000" ? (on utilisera une loi de probabilité adaptée) ;
2. Quelle est la probabilité pour que N soit strictement inférieure à 3 ?
3. quelle est la probabilité pour que N soit inférieure ou égale à 3 ?

IV. Pour aller plus loin

Exercice 12 ☆☆☆ *Modèle d'assurance*

Des sinistres surviennent sur une année avec une probabilité $p \in]0,1[$. Chaque sinistre à un coût fixe de C pour l'assureur. Chaque client paye une prime annuelle d'assurance π.

1. Pourquoi peut-on modéliser par une famille $(X_i)_{1\leq i\leq N}$ de N variables aléatoires de loi $b(p)$ les N clients d'un assureur ?
2. Quelle est l'espérance de S le solde annuel des sinistres pour l'assureur ?
3. Quelle est la variance de S ?
4. Donner une valeur de π la prime annuelle d'un assuré pour que l'assureur soit rentable une année avec une probabilité supérieure à 99%.

Exercice 13 ☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

a) Calculer

$$E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$$

b) Retrouver ce résultat par les séries génératrices.

Exercice 14 ☆☆

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé (Ω, P).

Montrer que :

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}$$

Exercice 15 ☆☆ *Sondage*

Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$.

On choisit un échantillon de n personnes et l'on pose $X_i = 1$ si le i-ème individu présente la propriété étudiée, 0 sinon. On considère que les variables aléatoires X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent toute une loi de Bernoulli de paramètre p.

a) Quelle est la loi suivie par

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \,?$$

b) Déterminer espérance et variance de S_n/n.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Etablir

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

d) Pour $\varepsilon = 0,05$, quelle valeur de n choisir pour que S_n/n soit voisin de p à ε près avec une probabilité supérieure à 95 % ?

Exercice 16 ☆☆ *Casino*

On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $1/2$, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert...). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :

- il mise initialement 1 euro sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.

a) On suppose la fortune du joueur infinie.

Montrer que le jeu s'arrête avec une probabilité égale à 1 (i.e. presque sûrement). Déterminer l'espérance de gain du joueur.

b) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.

Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?

c) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ euros ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 17 ☆☆

On s'intéresse aux nombres de clients arrivant à l'un des deux guichets (A et B) d'une banque. Pour cela modélisons le problème de la manière suivante : Le nombre de client quittant la file d'attente, noté X , est modélisé par une loi de Poisson $P(\lambda)$. Le choix de guichet A par le i ème client est modélisé par une loi Bernoulli $b(p)$. Ainsi Y_i vaut 1 avec probabilité p si le $i$ème client choisit bien le guichet A et 0 avec probabilité $1-p$ sinon. On supposera de plus que toutes les variables (X_i, Y_i) sont indépendantes.

Posons de plus $S = \sum_{k=1}^{X} Y_k$.

1. Que représente S ?
2. Que vaut $P_{\{X=n\}}(\{Y=k\})$?
3. Montrer que S suit une loi de Poisson.
4. En déduire $P_{\{Y=k\}}(\{X=n\})$

Exercice 18 ☆☆☆ *estimateurs statistiques*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.

On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\bar{V}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$

a) Calculer espérance et variance de $\bar{X}_n$.

b) Calculer l'espérance de $\bar{V}_n$.

Exercice 19 ☆☆

Soit X une variable aléatoire discrète, valeurs dans $\mathbb{R}$.

Supposons que $\mathbb{E}[X^2]$ existe, a-t-on $\mathbb{E}[X]$ existe ?