

Méthodes à retenir :

- Connaître avec précisions les définitions de produits scalaires, normes, normes associées à un produit scalaire; savoir les vérifier sur des exemples
- Savoir exprimer avec ε les limites dans un e.v.n.
- Savoir exprimer avec ε la continuité d'une application f allant d'une e.v.n. vers un autre.

I. Produits scalaires

Exercice 1 ☆☆ *Produit scalaire*

Démontrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 t^2 f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et valeurs réelles.

II. Normes

Exercice 2 ☆

Démontrer que sur \mathbb{R}^2 , l'application N de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} vérifiant :

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, N(x) = \max(|x_1 + x_2|, |x_1|, |x_2|)$ est une norme, puis dessiner la boule fermée $B_f(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2; N(x) \leq 1\}$.

Exercice 3 ☆☆ *Norme infinie d'une fonction*

Soit $I = [a, b]$ un segment.

Justifier que $\| \cdot \|_{\infty, I} : f \mapsto \sup_{t \in I} \{|f(t)|\}$ est une norme sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur le segment I .

Exercice 4 ☆☆☆ *Norme matricielle*

On appelle trace d'une matrice carrée A d'ordre n le nombre noté $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ égal à la valeur de la somme des coefficients diagonaux d'une matrice.

1. Démontrer que l'application

$$(M, N) \mapsto \text{tr}(M^T \times N)$$

définie un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. En déduire que l'application

$$N : M \mapsto \sqrt{\text{tr}(M^T \times M)}$$

définie une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

III. Limites

Exercice 5

En remarquant que $\| \cdot \|_{\infty} : M \mapsto \max\{|M_{ij}|, i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, étant donnée une suite $(M_p)_p$ de matrices qui converge vers une limite M , comment peut-on quantifier cette limite, avec $\varepsilon > 0$?

IV. Continuité

Exercice 6

Donner le domaine de continuité le plus grand possible de la fonction $g : (x, y) \mapsto \sqrt{x} (\cos(x - 2y))$.

Exercice 7

Donner le domaine de continuité le plus grand possible de la fonction $f : (x, y) \mapsto y\sqrt{1 - x^2}$

Exercice 8

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x, y) = \begin{cases} xy \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que g est définie sur \mathbb{R}^2 .
2. Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
3. Montrer que $|g(x, y)| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. En déduire que g est continue en $(0, 0)$.

Exercice 9

Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x, y) = \begin{cases} (x^2 + xy) \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité en $(0, 0)$ de la fonction h .
2. Étudier la continuité en $(0, 1)$ de la fonction h .
3. Étudier la continuité en $(1, 0)$ de la fonction h .

Exercice 10

On pose $f(x) = \int_x^{2x} t^3 \ln(t) dt$

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

V. Pour aller plus loin

Exercice 11 Normes Vectorielles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose pour

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes.
2. Montrer que : $\forall X \in E, \|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty$
3. Montrer que : $\forall X \in E, \|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty$

Exercice 12

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On rappelle que :

$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$ et $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ sont des normes sur E .

1. Montrer que pour tout $f \in E, \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 1 - nt & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } t > 1/n \end{cases}$$

Montrer que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3n}}$

3. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 13 Normes en dimension infinie

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $N; f \mapsto \int_0^1 e^x |f(x)| dx$

1. Montrer que N est une norme.
2. pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} = 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ = 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

- (a) tracer les graphes de f_4 et f_{10} .
- (b) Déterminer les suites $(N(f_n))_n$ et $(\|f_n\|_\infty)_n$.
- (c) les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 14 *point fixe contractant*

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\| \cdot \|$ une norme sur E . Soit $f : E \rightarrow E$ telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ et $a \in E$ vérifiant :

$$f(a) = a;$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 15 *fonctions höldériennes*

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\| \cdot \|$ une norme sur E . Soit $h : E \rightarrow E$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|h(x) - h(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha. \text{ Montrer que } h \text{ est continue sur } E.$$

Exercice 16 ☆☆☆☆ « Norme matricielle »

Sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |M_{ij}| \text{ pour } M = (a_{ij})_{(i,j) \in [1,n]^2};$$

a) démontrer que $\| \cdot \|$ est une norme.

b) vérifier que pour tous M et M' de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|MM'\| \leq \|M\|\|M'\|;$$

c) $\text{tr}(M)$ désignant la trace de M , c'est à dire la somme de ses coefficients diagonaux, déterminer $\|\text{tr}\| = \sup\{|\text{tr}(M)| ; M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \|M\| = 1\}$.

Exercice 17

Étudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Notes

² correction : préciser les bords

⁸ correction : $x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ donne $f(x_n, y_n) = 0$.

$$x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{2(n\pi + \pi/2)}} \text{ donne } f(x_n, y_n) = 1.$$

⁹ correction : $x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ donne $f(x_n, y_n) = 0$.

$$x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{2(n\pi + \pi/2)}} \text{ donne } f(x_n, y_n) = 1.$$