Méthodes à retenir :

- Avant de calculer des expressions de dérivées partielles, on justifie rapidement que les fonctions de 2 variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ en ce point, sinon il faut revenir aux limites de taux d'accroissements.

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes. Lorsqu'elles existent, déterminer les dérivées partielles par rapport à x et à y de ces fonctions sur ces ensembles.

1) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$.
2) $g(x,y) = \ln(1-xy)$.
3) $h(x,y) = x^y$.

Exercice 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$f(x,y) = e^{x-y} + x^2$, et $A = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
1) Déterminer le gradient de f en A. En déduire les extrema éventuels de f.
2) Déterminer la différentielle $\mathrm{d}f_A$ de f en A.

Exercice 3

Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe d'équation $x^2 + 4y^2 = 1$ au point $M = (1;0)$.

Exercice 4

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ au point $A = (1;0;0)$.

Exercice 5

Résoudre l'équation aux dérivées partielles
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y \quad (E)$

Exercice 6

Déterminer les éventuels points critiques des fonctions suivantes :
1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{x^2 y}$.
2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2y^2$.

II. Exercices

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
1) Déterminer et représenter l'ensemble de définition D_f de f. Est-ce un ouvert, un fermé ?
2) Déterminer le plus grand ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1.
3) Déterminer les éventuels points critiques de f.

Exercice 8

Posons

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy - 1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x \quad (2)$$

1. Résoudre (1).
2. Résoudre (2).
3. Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant (1) et (2).

Exercice 9

1) Rappeler la définition d'un maximum local pour une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2) Déterminer les éventuels extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = e^x + e^y + e^{-x-y}$.

Exercice 10
Soient $g = f \circ \varphi$, avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ (r, \alpha) \mapsto (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$

1. Exprimer, pour $A \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial r}(A)$, $\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}(A)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial z}(A)$ à l'aide de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(A))$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(A))$.
2. Application $f : (x, y) \mapsto \cos(xy)\ e^y$, $A = (1, 2)$.

Exercice 11
Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$
via le changement de variable $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$

Exercice 12
En réalisant le changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$
déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Exercice 13
En réalisant le changement de variables $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$,
résoudre :
$(E) : x\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot, \cdot) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \cdot) = 0.$

III. Pour aller plus loin

Exercice 14
Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$, on cherche les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de A vers $\mathbb{R}$ telles que pour tout (x, y) de A, l'équation aux dérivées partielles suivante soit vérifiée :

$$(E) : x\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, \cdot) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \cdot) = 0.$$

a) Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifier que $\varphi : A \to \mathbb{R}$, définie par :
$\varphi(x, y) = g(y/x)$ est solution de (E) ;
b) Démontrer que si f vérifie (E) alors $f(u, uv)$ ne dépend que de v ;
c) conclure.

Exercice 15
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^6 + (x^2 - y)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point A de $\mathbb{R}^2$ et les déterminer. f est-elle pour autant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 16 *Equation des cordes vibrantes*
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (E)$
L'équation (E) appelée équation des ondes unidimensionnelle (ou équation de D'Alembert) décrit le mouvement d'une corde soumise à des vibrations transversales se propageant à une vitesse $c > 0$ le long de la corde (propagation d'une onde transverse le long de l'axe (Ox)). Notons $L > 0$ la longueur de la corde.
On souhaite ainsi résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) d'inconnue $u : \begin{array}{ll} [0, L] \times \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto u(x, t) \end{array}$, de classe $\mathcal{C}^2$ avec conditions initiales $u(0, t) = u(L, t) = 0$.
1) En réalisant le changement de variables $\begin{cases} x = y + s \\ t = \dfrac{-y}{c} + \dfrac{s}{c} \end{cases}$
montrer que $v : (y, s) \mapsto u\left(y + s, \dfrac{-y}{c} + \dfrac{s}{c}\right)$ vérifie l'EDP : $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial s} = 0 \quad (2)$
2) En déduire qu'il existe deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que v soit de la forme
$v : (y, s) \mapsto g(2y) + h(2s)$
3) En déduire que u est de la forme

$$u : (x, t) \mapsto g(x - ct) + h(x + ct)$$

Exercice 17 *un problème d'optimisation*

Un industriel souhaite produire une boîte de chocolat cylindrique à base triangulaire équilatérale de volume V donné tout en minimisant la quantité de carton employé. Déterminer la longueur du côté ℓ de la base et la hauteur h d'une telle boîte.

Exercice 18

En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_\star^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exercice 19 *Mines*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

Exercice 20 *Ligne de plus grande pente*

Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto h(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$, et la surface paramétrée $\mathcal{S} = \{(x,y,h(x,y))\}$.
Soit $A_0 = (x_0,y_0)$ un point du plan, et $B_0 = (x_0,y_0,h(x_0,y_0))$ le point correspondant sur la surface $\mathcal{S}$.
Soit $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$ un vecteur unitaire avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Proposer une paramétrisation à vitesse constante $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto d(t)$ de la droite $\mathcal{D}$ passant par A_0 et dirigée par $\overrightarrow{d}$.
2. En déduire une paramétrisation $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \gamma(t)$ de la courbe Γ contenue dans $\mathcal{S}$, dont la projection dans le plan (Oxy) est $t \mapsto d(t)$.
3. En déduire que le vecteur vitesse de la courbe Γ en B_0 est $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \overrightarrow{Grad(h)}(A_0) \cdot \overrightarrow{d})$
4. En déduire que $\|\overrightarrow{v}\|$ est maximal pour $\overrightarrow{d}$ colinéaire à $\overrightarrow{Grad(h)}(A_0)$.
5. Justifier l'affirmation de notre ami(e) physicien(ne) :
« Le gradient (de h) dirige la ligne de plus grande pente »

Exercice 21 *Modélisation par moindres carrés*

Etant donné un n échantillon de mesures physiques $((x_i,y_i))_{1\le i\le n}$, on cherche à savoir si cet échantillon peut-être assimilé à des réalisations aléatoires de couples $((x_i, ax_i+b))_{1\le i\le n}$, pour des paramètres a et b de régression linéaire, selon une relation linéaire de la forme

$$y = ax + b$$

1. Par définition, la droite de régression linéaire associée à ces mesures est la droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$, où $(\hat{a},\hat{b}) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\delta_n(\hat{a},\hat{b}) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}|^2$ réalise le minimum de la fonction $(a,b) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b|^2$.
2. Justifier que résoudre ce problème revient à minimiser une quantité de la forme
$$(\star) \quad \|MV - Y\|_2^2$$
avec $M \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et $W \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
3. Que dire du projeté orthogonal $\hat{Y}$ de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{Im}(M)$? Etablir que $\hat{Y} = (M^T M)^{-1}\ M^T\ Y$.
4. Justifier que ce maximum est atteint et est unique, à l'aide de la formule de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base orthonormée
5. En déduire que l'équation de la droite des moindres carrées et obtenue pour des paramètres $\hat{a}$ et $\hat{b}$ que l'on explicitera en fonction des (x_i, y_i)

Exercice 22

On suppose que $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, que $A \in \mathbb{R}^2$ et que $g(A) \neq 0$. Donner les formules pour

$\nabla(fg)(A);\quad \nabla(f+g)(A);\quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right)(A).$

Notes

[1] correction : vrai, il suffit de transposer