Méthodes à retenir :

- Attention au vocabulaire et aux notations :
  $\sum_{n=0}^{N} u_n$ est une somme partielle, avec N fixé ; $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série convergente de terme général u_n ;
  Enfin $\sum_{n\geq 0} u_n$ désigne la série de terme général u_n dont on ne connaît pas forcément la nature ;
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ converge, il suffit de comparer $|u_n|$ au terme général d'une série convergente de référence.
- Pour justifier qu'une série $\sum u_n$ diverge, il suffit de savoir que u_n ne tend pas vers 0 (grossière divergence). La réciproque est FAUSSE ! (la série harmonique $\sum n^{-1}$ diverge...)
- Pour une série à termes tous positifs, montrer la convergence revient à majorer les sommes partielles (S_N) indépendamment de N par une même constante.

I. Calculs de sommes de séries convergentes

Exercice 1 ✰ *« Série géométrique »*

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\geq 0} = (a^n)_{n\geq 0}$. Calculer les sommes partielles $S_N = \sum_{i=0}^{N} a^i$, pour $N \in \mathbb{N}$. Nature de $\sum u_n$ et expression de la somme en cas de convergence.

Exercice 2 ✰ *« Série télescopique »*

Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$,

où $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et donner la valeur de sa somme.

On pourra remarquer que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)}$.

II. Nature d'une série

Exercice 3 ✰ *« Comparaison de séries »*

Sachant que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, quelle est la nature de la série :

$\sum_{n\geq 1} v_n$, pour $v_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}$?

$\sum_{n\geq 1} w_n$, pour $w_n = \dfrac{1}{n^2}$ si n est multiple de 3, $w_n = 0$ sinon ?

Exercice 4 ✰✰✰

Discuter selon la valeur des paramètres réels α, β la nature des séries suivantes de terme général :

a) $a_n = \alpha^{\sqrt{n}}$ b) $b_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{\beta}$

c) $c_n = \dfrac{n^\alpha}{1+n^\beta}$ d) $d_n = (1+n^\alpha)^\beta$

III. Séries et intégrales

Exercice 5 ☆☆ *« Sommes partielles d'une série divergente »*

1. Calculer $\displaystyle\int_1^M \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, pour $M \geq 1$ entier.
2. Pour $k \geq 2$, encadrer $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ en utilisant la décroissance sur $[k, k+1]$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$.
3. En déduire qu'un équivalent de $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ lorsque $N \to +\infty$ est $\ln N$.

Exercice 6 ☆☆ *« sommes partielles d'une série divergente »*

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en $+\infty$ des sommes partielles d'ordre n des séries suivantes de terme général u_n :

1. $u_n = 1/n^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$;
2. $u_n = \ln n/n$

IV. Séries alternées

Exercice 7 ☆☆ *« Critère spécial »*

Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge. En notant S sa somme, déterminer un entier N, pour que

$$|S - S_N| < 10^{-2}$$

en déduire une valeur approchée de S à 10^{-2} près.
Comment ferait-on en Python pour calculer cette valeur approchée ?

Exercice 8 ☆☆☆

Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$, où $\forall n \geq 1,\ u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

V. Pour aller plus loin

Exercice 9 ☆☆☆ *« HP : Série de “Bertrand” »*

Démontrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, de paramètres réels α et β, converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Exercice 10 ☆☆☆ *« Mines-Ponts »*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{(-1)^n \cos u_n}{n+1}$.

Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 11 ☆☆☆ *Mines-Ponts PC*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$.

1. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on précisera.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$
3. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{2^n}$

Exercice 12 ☆☆☆

Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$

1. Trouver une relation de récurrence entre les éléments de la suite (u_n).
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n ;
3. Donner la nature des suites et séries de termes généraux u_n , $(-1)^n u_n$, u_n/n
   (on pourra étudier la suite définie par :
   $v_n = \ln(n^{1/3} u_n)$)
4. Déterminer la somme de la série de terme général $(-1)^n u_n$

VI. Formule de Stirling

Exercice 13 ✰✰✰ *à savoir refaire*

1. *Equivalent de sommes partielles de séries positives divergentes*
   (a) Soient $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

   Justifier que pour tout $N \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} f(k+1) \leq \int_1^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{N} f(k)$.

   (b) En déduire que $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} f(k)$ est équivalent en $+\infty$ à $\displaystyle\int_1^{N+1} f(t)\mathrm{d}t$.

   (c) En déduire que $s_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ est équivalent en $+\infty$ à $\ln(N)$.

   (d) Le résultat du (b) est-il encore valable pour f croissante ?

2. *Développement limité de* $\ln(n!)$
   (a) Démontrer que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + O(n)$, puis que $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{O(n)}}$

   (b) En posant $u_n = \ln(n!) - n\ln(n)$ et en calculant $u_N - u_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} u_{k+1} - u_k$, vérifier que $u_N \underset{n\to+\infty}{\sim} -N$.

   En déduire que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + o(n)$, puis que $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{o(n)}}$

   (c) En posant $v_n = \ln(n!) - n\ln(n) + n$ et en calculant $v_N - v_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} v_{k+1} - v_k$, vérifier que $v_N \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln N}{2}$.

   En déduire que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \dfrac{\ln n}{2} + o(\ln n)$, puis que $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}\ \mathrm{e}^{o(\ln n)}}$

   (d) En posant $w_n = \ln(n!) - n\ln(n) + n - \dfrac{\ln n}{2}$ et en calculant $w_N - w_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} w_{k+1} - w_k$, vérifier que w_N admet une limite finie ℓ lorsque $N \to +\infty$.

   (e) En posant $K = \mathrm{e}^{\ell}$, montrer que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \dfrac{\ln n}{2} + \ell + o(1)$, puis que $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}}$

3. *Intégrales de Wallis* On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t$.
   (a) Calculer W_0 et W_1. Pour $k \geq 2$, établir une relation entre W_k et W_{k-2}.

   (b) En déduire les formules $\boxed{W_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $\boxed{W_{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

   (c) Justifier que la suite (W_n) est décroissante et positive, et pour tout $n \geq 0$, $0 < W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$, puis que $\lim \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

(d) En déduire la formule $\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$.

(e) En déduire la formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$

Notes

[1] correction :

pour $a \neq 1$, $S_N = \dfrac{a^0 - a^{N+1}}{1-a}$. il y a concergence ssi $a^{N+1} \to 0$ c'est à dire ssi $|a| < 1$, vers $\dfrac{1}{1-a}$.

[8] correction : Considerer un D.I. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{n} + r_n$, avec $r_n \underset{n\to}{=} O(n^{-3/2}$ terme général d'une série convergente, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV par critère spécial, et $\sum \dfrac{1}{n}$ DV.

[10] correction : $|u_{n+1}| \to 0$, par DL2, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + O(n^{-2})$