

Concours Blanc
PSI
MATHEMATIQUES
Lundi 2 Mars 2026
Durée : 4 heures
Sujet Type CCINP/E3A

RAPPEL DES CONSIGNES

- L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique ou document est interdit.
- L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte : Trois exercices et un problème indépendants.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- **Le candidat est prié de numéroté ses copies.**
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition

Exercice 1 : : Questions de cours

1. Soient n un entier naturel non nul et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
2. Soient n un entier naturel non nul et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.
 - (a) Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Donner la définition du $j^{\text{ième}}$ polynôme de Lagrange associé à $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.
 - (b) De quel espace $(L_j)_{0 \leq j \leq n}$ est-elle une base? Démontrer-le.
3. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
 - (a) Donner la définition du polynôme caractéristique de u . Préciser son degré, son coefficient dominant et deux autres de ses coefficients.
 - (b) A quoi sert-il?
 - (c) Donner la définition d'une valeur propre λ de u .
 - (d) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Donner la définition de $E_\lambda(u)$. A quelle condition sur cet espace, λ est-elle une valeur propre de u ?
 - (e) Donner l'encadrement pour $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ entre $\dim E_\lambda(u)$ et l'ordre de multiplicité de λ .
 - (f) Quelle est la définition de u diagonalisable?
 - (g) Quand E est de petite dimension, comment fait-on le plus souvent pour montrer que u est diagonalisable et le diagonaliser.
 - (h) Quelle propriété relie la diagonalisation et les polynômes annulateurs?
4. Justifier la nature des intégrales suivantes :
 - (a) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
 - (b) $\int_0^{+\infty} \frac{1+2t^2}{3+t^a} dt$ où $a \in \mathbb{R}^+$.
5. Énoncer le théorème de comparaison entre série et intégrale et l'utiliser pour donner la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ et donner un équivalent de $\sum_{n=1}^N \frac{\ln(n)}{n}$ quand N tend vers $+\infty$.
6. Citer le théorème de dérivation des séries de fonctions.
7. Citer le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.
8. Citer les trois formules fondamentales vues dans le premier chapitre sur les probabilités.
9. Donner les DSE des fonctions suivantes en précisant leurs intervalles de validité :
 - (a) ch .
 - (b) $\sin$.
 - (c) $x \mapsto \frac{1}{1+x}$
 - (d) $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (e) $x \mapsto \ln(1-x)$.
10. Donner la définition de la covariance de deux variables aléatoires.
11. Citer l'inégalité de Markov

Exercice 2

Soient n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Soient q un réel et r un entier naturel non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\sum_{k=0}^r q^k$.
2. Soit p un entier naturel non nul.
Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.
3. Soit $P \in E_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme Q de E_n tel que :

$$\forall x \neq 1, \quad Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt.$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

4. Prouver que f est un endomorphisme de E_n .
5. Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n , le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de ses dérivées.
6. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E_n .
Déterminer A et A^{-1} .
7. Déterminer les spectres des matrices A et A^{-1} .
8. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?
9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ d'un polynôme Q de E_n .
À quelles conditions α est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.
10. Déterminer les sous-espaces propres de f^{-1} .
11. Montrer que les sous-espaces propres de f^{-1} sont aussi les sous-espaces propres de f .

Exercice 3

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

On note $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$ la fonction génératrice de X .

L'objectif de cet exercice est d'affiner une majoration donnée par l'inégalité de BienayméTchebychev appliquée à une loi de Poisson.

1. Sans démonstration, donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $P(|X - \lambda| \geq \lambda)$.
3. Justifier que l'événement $\{X \geq 2\lambda\}$ est inclus dans l'événement $\{|X - \lambda| \geq \lambda\}$.
4. En déduire la majoration suivante :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (1)$$

5. Donner l'ensemble de définition de G_X .
6. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
7. On suppose que $t \geq 1$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}.$$

8. En déduire que :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda. \quad (2)$$

9. On admet que $e \cdot (\ln(4) - 1) \geq 1,05$. Quelle majoration (1) ou (2) de $P(X \geq 2\lambda)$ est la plus précise ?

Problème : Séries de Fourier

Dans ce problème, on introduit les notions de coefficients de Fourier réels et de série de Fourier d'une fonction réelle continue par morceaux et 2π -périodique. On étudie l'exemple d'une fonction pour laquelle on calcule les coefficients de Fourier réels (partie I) et on montre que la fonction coïncide en tout point avec la somme de sa série de Fourier (partie II).

Partie I-Calcul des coefficients de Fourier d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[-\pi; \pi]$ et 2π -périodique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad , \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Les réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont appelés coefficients de Fourier réels de la fonction f .

1. Montrer que si f est paire, alors $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 2 \int_0^{\pi} f(t) dt$ et que si f est impaire, alors $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$.
2. Soit une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]0; \pi]$:

$$g(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Montrer qu'il existe une manière unique de définir g sur $\mathbb{R}$ telle que g soit continue par morceaux, impaire et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

Déterminer en particulier $g(0)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de g sur $[-4\pi; 4\pi]$ dans un repère orthogonal.

3. Montrer que $a_0(g) = b_0(g) = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(g) = 0$ et $b_n(g) = \frac{1}{n}$.

Partie II - Convergence d'une série de Fourier

On appelle série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, 2π -périodique, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(f)$ définie à l'aide des coefficients de Fourier réels de f par :

- $U_0(f)$ est la fonction constante $x \mapsto \frac{1}{2} a_0(f)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(f) : x \mapsto a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$.

On admet que la série de Fourier de la fonction g définie à la question 2 converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on note S_g sa somme.

D'après la question 3 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

L'objectif de cette partie est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_g(x) = g(x)$.

4. Déterminer l'ensemble des $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1]$ tels que $|1 - te^{ix}| = 0$.
5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b < \pi$ et $x \in [a; b]$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $t \in [0; 1]$:

$$|1 - te^{ix}| \geq m$$

6. En déduire que pour tout $x \in]0; \pi[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - te^{ix}|} dt = 0$$

7. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in]0; \pi[$ et $t \in [0; 1]$, on a :

$$\sum_{n=1}^N t^{n-1} e^{inx} = e^{ix} \frac{1 - t^N e^{iNx}}{1 - te^{ix}}$$

8. En déduire que pour tout $x \in]0; \pi[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n}$ converge et que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n}$$

Pour tout $\lambda \in]-1; 1[$, on pose $I(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2\lambda t + 1}$.

9. Justifier l'existence de $I(\lambda)$ et montrer que :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{1-\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right) \right).$$

10. En déduire que, pour tout $x \in]0; \pi[$, on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 - 2t \cos(x) + t^2} = \frac{1}{\sin(x)} \frac{\pi - x}{2}.$$

11. Conclure.

****FIN****