



Concours Blanc
PSI
MATHEMATIQUES
Lundi 2 Mars 2026
Durée : 4 heures
Sujet Type Mines/Centrale

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique ou document est interdit.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte : Deux problèmes indépendants.

Le candidat est prié de numéroté ses copies.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Problème I : Endomorphismes échangeurs

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{C}$, le corps des complexes, pour corps de base.

Etant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $M_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $M_n(\mathbb{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E .

Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \quad \text{et} \quad u(G) \subset F$$

Etant donnés deux endomorphismes u et v de E , on dit que v est **semblable** à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v .

On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E . On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$.

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

- (C1) l'endomorphisme u est échangeur ;
- (C2) il existe $a, b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$;
- (C3) les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

A. Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2 et un endomorphisme u de E .

1. Montrer que si u vérifie la condition (C3) alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.

On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det(u)$.

2. Montrer que $u^2 = \delta^2 I_E$, déterminer le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres.
3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u , une droite vectorielle D telle que $u(D) \not\subset D$ et en déduire que u est échangeur.

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $A \in M_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$$

4. Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ de $M_{n+p}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.
5. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$D = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix}$$

Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis $DM D^{-1}$, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

6. On suppose ici F et G tous deux non nuls.
On se donne une base $(f_1, \dots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \dots, g_p)$ de G .
La famille $B = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est donc une base de E .
Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice u dans B .
7. Déduire des questions précédentes que u vérifie (C2) et (C3). On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces F ou G est nul.

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un automorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

8. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer $\ker(f)$ à $\text{Im}(f)$ et en déduire

$$\dim(\ker(f)) \geq \frac{1}{2} \dim(E)$$

9. Démontrer que $E = \ker(a) \oplus \ker(b)$, et que $\ker(a) = \text{Im}(a)$ et $\ker(b) = \text{Im}(b)$.

10. En déduire que u est échangeur.

Problème II : Quelques applications de la formule de Stirling

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

I Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

I.A –

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Q 1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Q 2. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n , et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n .

I.B –

Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (\text{I.1})$$

Q 3. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy.$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n}, +\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n}, +\infty[$ et 0 sur $] -\infty, -\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}(y) \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

Q 4. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y \in \mathbb{R}$, préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y)$.

Pour $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ on pose $q(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

Q 5. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $] -1, +\infty[$ que l'on convient de noter également q .

Q 6. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du$.

Q 7. En déduire que q est une fonction décroissante sur $] -1, +\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(y) \leq (1+y)e^{-y} \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^-, \quad f_n(y) \leq e^{-y^2/2}.$$

Q 8. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (I.1).

I.C Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad v_n = \ln(u_n) \quad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

Q 9. Vérifier que $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

I.C.1) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

Q 10. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad (1 - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon)b_n.$$

Q 11. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

I.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Q 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2}$.

Q 13. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

I.C.3)

Q 14. Déduire des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Q 15. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

II Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in]0, 1[\text{ et } q = 1 - p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie. L'abscisse S_n du point à l'issue du n -ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors,

pour tout $n \geq 2$, quel que soit l'entier k compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\sum_{i=k+1}^n Y_i$ suivent la même loi.

On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.

On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (i.e. $S_k = 0$) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (i.e. $k = 2n$).

On introduit alors les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \quad \text{et} \quad b_n = \mathbb{P}([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0])$$

et les séries entières

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

II.A –

Q 16. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X_1 + 1)$? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable S_n .

Q 17. écrire une fonction Python qui prend en argument le nombre n de lancers et renvoie le nombre de retours au point à l'origine.

On pourra utiliser la fonction Python `random.random()` qui renvoie un nombre flottant pseudo-aléatoire dans l'intervalle $[0, 1[$.

Q 18. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

Q 19. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^{2n}$.

Q 20. Pour quelles valeurs de p l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$?

Q 21. En utilisant le développement en série entière en 0 de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ déterminer une expression de $A(x)$.

II.B –

Q 22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en décomposant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation $a_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}$.

Q 23. En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de x elle est valable.

Q 24. Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ pour x dans un intervalle à préciser.

Q 25. Pour quelles valeurs de p l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?

II.C –

Q 26. En déduire que la probabilité de l'événement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à $|p - q|$.