Concours Blanc
PSI
MATHEMATIQUES
ALGÈBRE

Mardi 22 Février 2022

(Durée : 2 heures)

L'usage de calculatrice est interdit.

Vous avez le choix entre deux sujets : Sujet $n°1$ type CCINP/E3A et Sujet $n°2$ type Mines Ponts

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons ses initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- **Indiquer le sujet choisi**
- **Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.**
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Indiquer au début de la copie le nombre de copies doubles utilisées.**
- **Numéroter les feuilles.**
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.**

Sujet CCINP/E3A

Exercice

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B} = ((E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2})$ sa base canonique.

On rappelle que $\forall\,(r,t,u,v) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{r,t} \times E_{u,v} = \begin{cases} O_n & \text{lorsque } t \neq u \\ E_{r,v} & \text{lorsque } t = u \end{cases}$

Si $M \in E_n$, on notera dans tout l'exercice, $\mathrm{tr}(M)$ la trace de la matrice M et M^T la matrice transposée de la matrice M.

On dira qu'une matrice M de E_n est **nilpotente** s'il existe un entier naturel r non nul tel que : $M^r = O_n$. Par exemple, la matrice $E_{1,2}$ de $\mathscr{B}$ est nilpotente.

On rappelle que l'application qui à tout couple de matrices (A,B) de E_n associe $(A \mid B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur E_n.

On dira qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ est **stable pour une matrice** A de E_n si : $\forall X \in V$, $AX \in V$.

* * *

Soit H un hyperplan de E_n. On veut montrer que H contient au moins une matrice inversible de E_n.

1. Soit T une matrice n'appartenant pas à H. Démontrer que l'on a : $E_n = H \oplus \mathrm{Vect}(T)$. *On n'attend pas simplement l'énoncé d'une propriété mais une démonstration complète*
2. Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique $\mathscr{B}$.
3. Déterminer les valeurs propres d'une matrice nilpotente.
4. On note $U = \displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} (E_{i,j} + E_{j,i})$. Calculer le déterminant de U et démontrer que U est inversible.
5. On suppose alors que H ne contient pas de matrice inversible.

   Soit N une matrice nilpotente de E_n

   (a) Justifier l'existence d'une matrice $A \in H$ et d'un scalaire α tels que : $N = A + \alpha I_n$.

   (b) Justifier que 0 est valeur propre de A et prouver que $N \in H$.
6. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de l'exercice que H est stable pour la multiplication des matrices, c'est-à-dire que : $$\forall (A,B) \in H^2, \quad AB \in H$$

7. (a) Que sait-on sur le produit de 2 matrices triangulaires supérieures ?

   (b) On prend $n = 2$. Exhiber un hyperplan de E_2 stable pour la multiplication des matrices.
8. On se propose de montrer que $I_n \in H$ et on raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin H$.

   (a) On note p la projection sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à H.

   Prouver que l'on a : $\forall (M,N) \in E_n^2$, $p(MN) = p(M)p(N)$.

   (b) Démontrer l'implication suivante : $M^2 \in H \Rightarrow M \in H$.

   (c) Prouver alors que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j} \in H$.

   (d) Conclure.

Problème

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynômiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$.
Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.
3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :
$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$
On pourra utiliser le théorème de Rolle.
5. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :
$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$
Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :
$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$
6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$. On les note $x_1, \dots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.
$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n}(X-x_k).$$
En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions 8 à 13, n désigne un entier naturel.

8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

9. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.
10. Montrer que ϕ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question 9.*
11. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 11, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.
13. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question 12.*
14. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ.