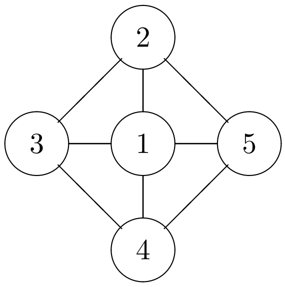
Sujet Mines-Ponts
Marche aléatoire dans un labyrinthe

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ ($k \in \mathbb{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leqslant i \leqslant 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. À titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice-colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k = 1) \\ \mathbb{P}(S_k = 2) \\ \mathbb{P}(S_k = 3) \\ \mathbb{P}(S_k = 4) \\ \mathbb{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R}).$$

Pour une matrice B, ${}^tB$ représente sa matrice transposée.

I Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbb{P}(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(\mathbb{P}(S_k = i),\ i = 1, \ldots, 5)$.
2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout k entier naturel.
3. En observant les colonnes de la matrice B, montrer que le réel 1 est valeur propre de ${}^tB$ et expliciter un vecteur propre associé.

   On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires S_k ont toutes la même loi.
5. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

6. Soit $x \in \ker(u - I_E)$. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} r_k(x)$.
7. Soit $x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.
8. En déduire que $E = \ker(u - I_E) \oplus \operatorname{Im}(u - I_E)$.
9. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p\ :\ E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

III Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0\ ; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.
12. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

    On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
13. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions 14 à 21, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

14. Montrer que $\ker(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

    Indication : soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $x_s = \max_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
15. En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.
16. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
17. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P de rang 1.

    On admettra par la suite que P est stockastique
18. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice-ligne stochastique.
19. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
20. Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.
21. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A. *On pourra utiliser le résultat de la question 8.*

*** FIN ***