Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*
• ***Comment préparer une colle ?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*
• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8. Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.*
• ***Après la colle*** *: Je vous demande de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.Je récupèrerai les cahiers de colle le mardi de la semaine suivante à votre colle*
N'hésitez pas à venir me poser des questions*. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle, d'enrichir vos TD d'exercices supplémentaires que vous pourrez revoir avant vos devoirs surveillés, pendant les devoirs maison, avant les concours*

1 Polynômes d'endomorphismes et matriciels

1. Définition, règles de calculs.
2. Polynôme Annulateur : définition, **Soit λ une valeur propre de $u \in \mathscr{L}(E)$ associée à un vecteur propre x, P un polynôme.**
   Alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ associé au vecteur propre x. Si P est un polynôme annulateur de u, alors
   $$Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}/P(\lambda) = 0\}$$
3. Déterminer puissances d'un endo. ou matrice à partir d'un polynôme annulateur.
4. Théorème de Cayley Hamilton. *À l'issue de ce chapitre, il doit falloir être capable de trouver un polynôme annulateur à partir d'une équation matricielle ou faisant intervenir les itérés d'un endo, puis calculer les puissances d'un endo. ou matrice à partir d'un polynôme annulateur, de citer le théorème de Cayley Hamilton.*

2 Réduction

1. Définition d'une somme d'une famille finie de sous espaces vectoriels, structure d'espace vectoriel.
2. Somme directe : définition et comment montrer qu'une somme est directe, ou qu'elle ne l'est pas, **La somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe**.
3. Sous espaces supplémentaires.
4. Cas où E est de dimension finie : Caractérisation des sommes directes et de sous espaces supplémentaires par la dimension .
5. Base d'un espace adaptée à une décomposition en somme directe ou à un sous espace vectoriel.
6. Diagonalisation :
   (a) **Définition, énoncé du théorème** :
   Il y a équivalence entre les points suivants :
      i. u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
      ii. $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u.
      iii. $n = \dim E_{\lambda_1}(u) + \dim E_{\lambda_2}(u) + \cdots + \dim E_{\lambda_p}(u)$.
      iv. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \omega_u(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$

   (b) **Si $Sp(u)$ est réduit au singleton $\{\lambda\}$, u est diagonalisable ssi $u = \lambda Id_E$**

   (c) i. **Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, alors u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.Mais la réciproque est fausse!!!!!!!**.
      ii. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

   (d) Caractérisation de la diagonalisation par les polynômes annulateurs : connaître les énoncés suivants :
      i. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et u un endomorphisme de E.
      u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.
      ii. u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u est un polynôme annulateur de u.