Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices, un exercice d'algèbre et un exercice d'analyse. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*

• ***Comment préparer une colle?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*

• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.*

• ***Après la colle*** *: Je vous conseille très fortement de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.*

N'hésitez pas à venir nous poser des questions*. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle.*

1 Algèbre

1.1 Formes linéaires et Hyperplan

Savoir Faire :

— *Vous devez **savoir démontrer** qu'un sev de E est un hyperplan,donner la forme linéaire dont il est le noyau,sa dimension et son équation quand E est de dimension finie et éventuellement une base.*

— *Vous devez savoir **montrer** que si H est un hyperplan de E de dim finie, et $a \notin H$, alors $E = \mathrm{Vect}(a) \oplus H$.*

2 Eléments propres

1. Définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée et d'un endomorphisme en dimension finie, valeur propre, vecteur propre, sous espace propre, spectre d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ ev (pas forcément en dimension finie) et d'une matrice carrée.
2. Propriétés sur le polynôme caractéristique, relation entre racines et valeurs propres, valeurs propres et determinant et trace.
3. Ordre de multiplicité d'une valeur propre, inégalité entre la dimension du sous espace propre et ordre de multiplicité.

Savoir Faire : Vous devez savoir déterminer toutes les notions précédentes pour une matrice ou un endomorphisme donné.

2.1 Démonstrations à connaître

Voir les paragraphes précédents et connaître les définitions.

3 Analyse

3.1 Probabilités dans un espace probabilisé

- Ensembles dénombrables
- Tribu des événements, probabilité sur une tribu, σ-additivité, espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Propriétés
- Indépendance, probabilités conditionnelles

3.2 Espaces vectoriels normés

- Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe
- Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-e.v.
- Parties convexes, boules ouvertes et fermées dans un e.v.n.
- Normes équivalentes, limites dans un espace vectoriel normé. Cas de la dimension finie.

Il est essentiel de savoir démontrer qu'une application N définie sur un espace vectoriel est une norme et si cela est judicieux, de définir un candidat produit scalaire associé, de démontrer que cela en est un...

3.3 Démonstrations à connaître

- **Se donnant un produit scalaire $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ sur un $\mathbb{R}$-e.v. E, l'application N définie sur E par $N(x) = \sqrt{\langle x ; x \rangle}$ est une norme sur E.**
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
- Les définitions du cours sont à savoir : Norme, produit scalaire, boule ouverte, fermée, équivalence de deux normes, limite d'une suite de vecteurs dans un espace vectoriel normé pour une norme donnée, etc.

3.4 Résultats

- **Lois de Morgan** (échange union $\leftrightarrow$ intersection par passage au complémentaire)
- Tout le vocabulaire classique utilisé en probabilités : événements, issues, système complet d'événements etc.
- **Continuité monotone d'une probabilité** : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$),
alors la suite $(\mathrm{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$),
alors la suite $(\mathrm{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

- Sous-additivité d'une probabilité
- Indépendance : indépendance deux à deux et indépendance mutuelle. Indépendance et passage au complémentaire.
- Probabilités conditionnelles : loi des probabilités composées, théorème des probabilités totales (version σ-additive) et théorème de Bayes.
- Norme, produit scalaire, norme induite par un produit scalaire, normes de référence usuelles : normes 1 ; 2 et ∞.
- Parties convexes, boules ouvertes et fermées dans un e.v.n.
- Normes équivalentes, suites et limites de suites dans un e.v.n. Cas de la dimension finie : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On se donne une base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ de E. On considère une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E et $l \in E$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{i=1}^{p} x_{n,i}e_i$ et $l = \sum_{i=1}^{p} l_i e_i$. On considère une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E et $l \in E$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{i=1}^{p} x_{n,i}e_i$ et $l = \sum_{i=1}^{p} l_i e_i$.*

$$(x_n)_n \textit{ converge vers } l \iff \forall i, (x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge vers } l_i$$

.