classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°12$ du 15 Décembre 2025**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  — Le premier exercice doit contenir :
    — Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
    Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les groupes 2,3 et 5.
    — Une application très directe du cours :
  — Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8.
  Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le jeudi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Réduction

Evidemment, les outils des deux chapitres précédents (éléments propres et polynômes d'endomorphismes et matriciels) doivent être maîtrisés

1. Définition d'une somme d'une famille finie de sous espaces vectoriels, structure d'espace vectoriel.
2. Somme directe : **définition et comment montrer qu'une somme est directe, ou qu'elle ne l'est pas, la somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe**.
3. Sous espaces supplémentaires.**définition, caractérisation en dimension finie**
4. Base d'un espace adaptée à une décomposition en somme directe ou à un sous espace vectoriel **définition**
5. Diagonalisation :
   (a) **Définition, énoncé du théorème** :
   Il y a équivalence entre les points suivants :
      i. u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
      ii. $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u.
      iii. $n = \dim E_{\lambda_1}(u) + \dim E_{\lambda_2}(u) + \cdots + \dim E_{\lambda_p}(u)$.
      iv. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \omega_u(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$
   (b) **Si $Sp(u)$(resp : $\mathbb{S}_{\mathbb{I}}(A)$ est réduit au singleton $\{\lambda\}$, u est diagonalisable ssi $u = \lambda Id_E$ (resp : $A = \lambda I_n$)**
   (c) i. **Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, alors u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.Mais la réciproque est fausse ! ! ! ! ! ! !**.
      ii. **Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable**.
   (d) Caractérisation de la diagonalisation par les polynômes annulateurs :
      i. **Bien connaître l'énoncé** :Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et u un endomorphisme de E.
      u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.
      ii. **Démo $\star$ et énoncé pour les autres :u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u est un polynôme annulateur de u.**
      iii. **Savoir chercher les sev stables par un endomorphisme diagonalisable**
      Démo $\star$ Caractérisation des sous espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.
      iv. Théorème Spectral.**énoncé**
      v. Trigonalisation : **définition, caractérisation par le polynôme caractéristique scindé** exemples, aucune méthode de trigonalisation n'est exigible.
      vi. Applications de la réduction : calcul de puissances, d'inverse, suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à termes soit complexes, soit réels : **savoir donner directement le terme général de la suite**, suites récurrentes linéaires d'ordre p **connaître la méthode pour trouver le terme général d'une suite $(u_n)_n$ telle que** $\exists(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = \alpha_1 u_{n+p-1} + \cdots + \alpha_p u_n$
   (e) **Connaître la méthode pour résoudre un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coeffs constants** On en profite pour revoir comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

2 Exercices à savoir refaire

Exercice 1. ($\star$)

1. Pour $k \geq 1$, déterminer les dérivées secondes de $f_k : x \mapsto \cos(kx); g_k : x \mapsto \sin(kx)$.
2. En déduire que f_k et g_k sont des vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à définir.
3. En déduire que $(f_k, g_k)_{k\geq 1}$ est une famille libre.

Exercice 2. ($\star$) Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f^3 = Id_E$. Montrer que $E = \text{Ker}\,(f - Id_E) \oplus \text{Ker}\,(f - jId_E) \oplus \text{Ker}\,(f - j^2 Id_E)$.

Exercice 3. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $A_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle diagonalisable ?
2. Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle inversible ?

Exercice 4. Donner les sev stables par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.

1. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Diagonaliser p.

Exercice 6. Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique P.

1. On suppose que P a n racines distinctes. Montrer que A et B sont semblables.
2. Trouver deux matrices ayant même polynôme caractéristique mais qui ne sont pas semblables.

Exercice 7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 et $n \geq 2$.

1. Donner la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A, dans une base adaptée à son noyau.
2. En déduire que $A^2 = \text{tr}\,(A)A$.
3. Donner un polynôme annulateur de A de degré 2.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\omega \in \mathbb{C}$

1. Montrer que si ω est une valeur propre d'ordre de multiplicité m de A, alors $\bar{\omega}$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité m de A
2. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$.
   (a) A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
   (b) A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
   (c) Montrer que n est pair.
3. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$.
   (a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
   (b) En déduire la forme du polynôme caractéristique de A.
   (c) Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 9. Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 en utilisant le théorème spectral.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

1. A est elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? trigonalisable sur $\mathbb{R}$?
2. Trigonaliser A en complétant la famille obtenue en réunissant les bases des sous espaces propres.
3. Montrer qu'elle est semblable à $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 11. 1. Donner le terme général de la suite $(u_n)_n$ à coefficients réels, vérifiant : $\forall n \geq 0, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$, $u_0 = u_1 = 1$.

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 12. Donner en fonction de u_0, u_1, u_2 le terme général de la suite $(u_n)_n$ définie :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+3} + 2u_{n+2} - 5u_{n+1} - 6u_n = 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n$.

Exercice 13. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 4x - y - 2z + e^t \\ y' & = & 2x + y - 2z \\ z' & = & x - y + z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 3x - y - z \\ y' & = & -x + 2y \\ z' & = & 3x - 2y \end{array} \right.$$