



Colle de mathématiques

ATENTION : Une colle sera du type d'un oral de CCINP, à savoir deux exercices, un exercice d'algèbre et un exercice d'analyse. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si, dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.

• **Comment préparer une colle?** : Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.

• **Notation** : Dès lors qu'il s'agit que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.

• **Après la colle** : Je vous conseille très fortement de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.

N'hésitez pas à venir nous poser des questions. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle.

MEILLEURS VŒUX À TOUS POUR 2022!

1 Algèbre

1.1 Corrections du DS n°5

1.2 Polynômes d'endomorphismes et polynômes matriciels

- Polynômes d'endomorphismes et matriciels : définition et propriété en rapport avec les combinaisons linéaires et produits, Polynômes matriciels d'une matrice triangulaire par bloc.
- Polynômes annulateurs :
 - Définition.
 - Applications : **localisation du spectre** calcul des puissances d'une matrice ou d'un endomorphisme, puis calcul de l'inverse.
- Théorème de Cayley Hamilton.

Savoir faire : trouver un polynôme annulateur, savoir montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur de degré donné, savoir à partir d'un polynôme annulateur calculer les puissances, l'inverse si il existe, l'ensemble des polynômes matriciels d'un endo ou d'une matrice, l'ensemble des polynômes annulateurs dans le cas où on a trouvé le polynôme annulateur de plus petit degré

1.3 Somme de sev, Somme directe

- Définition de la somme de sev et structure d'espace vectoriel en la voyant comme l'image de l'endomorphisme $\varphi : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto x_1 + \dots + x_p$.

- Somme directe : définition, méthode pour montrer qu'une somme est directe, qu'une somme ne l'est pas, cas exceptionnel de deux sev où il suffit d'étudier l'intersection. **la somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe**

Savoir décrire une somme de sev, démontrer qu'une somme est directe

2 Analyse

2.1 Espaces vectoriels normés

- Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe
- Produit scalaire sur un \mathbb{R} -e.v.
- Parties convexes, boules ouvertes et fermées dans un e.v.n.
- Normes équivalentes, limites dans un espace vectoriel normé. Cas de la dimension finie.

Il est essentiel de savoir démontrer qu'une application N définie sur un espace vectoriel est une norme et si cela est judicieux, de définir un candidat produit scalaire associé, de démontrer que cela en est un...

2.2 Séries entières

- Définition.
- Rayon de convergence, disque ou intervalle ouvert de convergence.
- Lien entre la comparaison asymptotique des coefficients et le rayon de convergence en terme d'inégalité
- Détermination effective de rayons de convergence, soit en utilisant la définition, des propriétés ou bien à l'aide de la règle d'Alembert.
- Somme et produits de séries entières. Rayons de convergence d'une somme ou d'un produit.
- Régularité des séries entières : continuité, classe C^∞ , dérivation et intégration d'une série entière.
- Fonctions développables en séries entières et séries de Taylor pour la variable réelle. Unicité du DSE.
- Lien avec les équations différentielles
- DSE des fonctions usuelles.