# Colle de **mathématiques**

ATTENTION : *Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices, un exercice d'algèbre et un exercice d'analyse. Au cours de ces exercices, des questions de cours (du type énoncé d'une propriété ou d'une définition) devront vous être posées. Si , dans le programme de colle, il apparaît des démonstrations à connaître **signalées en gras**, elles pourront vous être demandées en début de colle.*
• ***Comment préparer une colle ?*** *: Une colle se prépare en ayant en mémoire parfaitement le cours ainsi que les exemples et applications directes inclus dans le cours et T.D.*
• ***Notation*** *: Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure strictement à 10.*
• ***Après la colle*** *: Je vous conseille très fortement de rédiger sur un cahier les exercices que vous avez eus en tenant compte des indications et remarques éventuelles de votre colleur.*
***N'hésitez pas à venir nous poser des questions****. L'intérêt pour vous est de retenir et d'avoir appris quelque chose de votre colle.*

# 1 Algèbre

## 1.1 Somme de sev, Somme directe

1. Définition de la somme de sev et structure d'espace vectoriel en la voyant comme l'image de l'endomorphisme $\varphi : (x_1, x_2, \cdots, x_p) \mapsto x_1 + \cdots + x_p$.
2. Somme directe : définition, méthode pour montrer qu'une sonne est directe, qu'une somme ne l'est pas, cas exceptionnel de deux sev où il suffit d'étudier l'intersection. **la somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe**
3. Sous espaces supplémentaires.
4. Cas où $E$ est de dimension finie.
   (a) Dimension de la somme de sev est inférieure à la somme des dimensions des sev. Cas de l'égalité.
   (b) Caractérisation des sev supplémentaires à l'aide de la dimension.
   (c) Base d'un espace adaptée à une décomposition en somme directe.
   (d) Base de $E$ adaptée à un sev de $E$

*Savoir-faire : démontrer qu'une somme est directe, savoir utiliser qu'une somme est directe, savoir montrer que des sev de $E$ sont supplémentaires dans $E$. Savoir définir une base adaptée, savoir utiliser une base adaptée pour trouver une matrice semblable à une autre.*

# 2 Analyse

## 2.1 Espaces vectoriels normés

- Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe
- Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-e.v.
- Parties convexes, boules ouvertes et fermées dans un e.v.n.
- Normes équivalentes, limites dans un espace vectoriel normé. Cas de la dimension finie.

*Il est essentiel de savoir démontrer qu'une application $N$ définie sur un espace vectoriel est une norme et si cela est judicieux, de définir un candidat produit scalaire associé, de démontrer que cela en est un...*

## 2.2 Séries entières

- Définition.
- Rayon de convergence, disque ou intervalle ouvert de convergence.
- Lien entre le comparaison asymptotique des coefficients et le rayon de convergence en terme d'inégalité
- Détermination effective de rayons de convergence, soit en utilisant la définition, des propriétés ou bien à l'aide de la règle d'Alembert.
- Somme et produits de séries entières. Rayons de convergence d'une somme ou d'un produit.
- Régularité des séries entières : continuité, classe $\mathcal{C}^\infty$, dérivation et intégration d'une série entière.
- Fonctions développables en séries entières et séries de Taylor pour la variable réelle. Unicité du DSE.
- Lien avec les équations différentielles
- DSE des fonctions usuelles.