classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°16$ du 26 Janvier 2026**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  - Le premier exercice doit contenir :
    - Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
      Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les groupes 2,3 et 5.
    - Une application très directe du cours :
  - Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8.
  Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le jeudi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Correction du problème II du DS n^5 Type CCINP

2 Probabilités

1. Ensembles dénombrables et familles sommables :
   (a) définition d'un ensemble dénombrable, au plus dénombrable, les propriétés à connaître sont :
      - Toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.
      - Si E est un ensemble dénombrable, alors toute partie infinie de E est aussi dénombrable.
      - Toute réunion finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
      - Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
      - $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ sont dénombrables, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable car il existe des parties non dénombrables.
2. Espaces Probabilisés :
   (a) Le vocabulaire autour des probas ; Univers,éventualité,tribu, Événements, événement certain, impossible, élémentaire, contraires,incompatible, indépendant, définition d'un système complet d'événements,
   (b) Probabilité : Définition et les propriétés usuelles. Savoir à partir d'une suite (p_n), justifier qu'il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ où $\Omega = \{\omega_n / n \in I\}$ avec I partie de $\mathbb{N}$. Propriété de continuité monotone.
   (c) Événements indépendants : cas de deux événements indépendants, d'une famille d'événements deux à deux indépendants et une famille finie d'événements mutuellement indépendants.
   (d) Probabilité conditionnelle
   (e) Formules des probabilités composées,totales, formule de Bayes.
3. Variables aléatoires, la notation $(X \in U), (X = a)$, opérations .
4. Loi de probabilité d'une v.a.d
   (a) Pour trouver la loi de X, je procède de la manière suivante :
      i. Je donne $X(\Omega)$, c'est à dire toutes les issues possibles. On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
      ii. On se donne une issue x_i et je dois calculer $P(X = x_i)$. Pour cela, j'écris $(X = x_i)$ à l'aide d'une réunion, ou/et intersection ou/et contraire d'événements dont il est plus facile d'étudier la proba. et nous amène à utiliser les formules vues au chapitre Espaces probabilisés.
   (b) Comment savoir si X est une v.a lorsqu'on nous donne une suite $(p_n)_n$ telle que $P(X = x_n) = p_n$: je dois montrer que :
      $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 0, \sum\limits_{n \geqslant 0} p_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
   (c) Les lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson .
5. Couple de variables aléatoires discrètes : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.
6. Variables aléatoires indépendantes, mutuellement indépendantes : définitions, la propriété : Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.
   (a) Alors, pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de $(X_i(\Omega))_{i \in I}$,
   $$P(\bigcap_{i \in I} (X_i \in A_i)) = \prod_{i \in I} P((X_i \in A_i))$$
   (b) Soient f et g deux fonctions à plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que l'on peut définir les variables aléatoires $f(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_p})$ et $g(X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_q})$ où $\{i_1, \cdots, i_p\} \cap \{k_1, \cdots, k_q\} = \emptyset$.
   $f(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_p})$ et $g(X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_q})$ sont indépendantes.